

正規分布を用いたリスク評価

宮田庸一

早稲田大学国際教養学部

収益率

- 1ヵ月後の収益率とは, 1ヵ月後, 現在の株価が何パーセント上昇（もしくは下落）するかを示している

収益率

- 1ヵ月後の収益率とは, 1ヵ月後, 現在の株価が何パーセント上昇（もしくは下落）するかを示している
- 【例】 A社の7月の株価 1000 円, 1ヵ月後の収益率が $0.02 \implies 1000 \times 0.02 = 200$ 円より 8月の株価は 1200 円となる.

収益率

- 1ヵ月後の収益率とは, 1ヵ月後, 現在の株価が何パーセント上昇（もしくは下落）するかを示している
- 【例】 A社の7月の株価 1000 円, 1ヵ月後の収益率が $0.02 \implies 1000 \times 0.02 = 200$ 円より 8月の株価は 1200 円となる.
- 収益率は将来の不確実な動きを表すので, 確率変数 R として表す

問題

A社の株価の1ヵ月後の収益率を R とする.

$R \sim N(0.01, (0.02)^2)$ と仮定する.

① $P(R \geq 0)$ を求めよ

② $Z \sim N(0, 1^2)$ とする. $P(Z \leq b) = 0.05$ を満たす b を求めよ

③ $P(R \leq a) = 0.05$ を満たす a を求めよ

ヒント:②を用いて③を解く. ①は準備運動みたいなもの.

答え

$$\textcircled{1} P(R \geq 0) = P\left(\frac{R - 0.01}{0.02} \geq \frac{0 - 0.01}{0.02}\right) = P(Z \geq -0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915.$$

② 正規分布表より $b = -1.64$. ただし $b = -1.65$ や $b = -1.645$ も正解

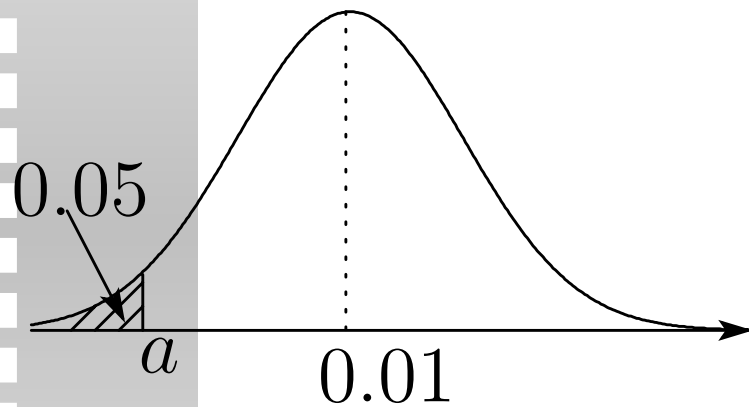
$$\textcircled{3} 0.05 = P(R \leq a) = P\left(\frac{R - 0.01}{0.02} \leq \frac{a - 0.01}{0.02}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - 0.01}{0.02}\right)$$

となる. ②の結果より $\frac{a - 0.01}{0.02} = -1.64$ となる. よって

$$a = 0.01 + 0.02 \times (-1.64) = -0.0228$$

VaR(Value at Risk)

問題 ③ $R \sim N(0.01, (0.02)^2)$, $P(R \leq a) = 0.05$ を満たす a を求める.



a が小さいもののほど, 大損をする可能性があることを意味している. a をリスク評価として使うことができる.

- $-a$ をバリュアットリスク (VaR) と言う.

VaR

ここでは, 一般的な VaR を定義する.

- 収益率 $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする

VaR

ここでは, 一般的な VaR を定義する.

- 収益率 $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする
- $P(R \leq a) = 0.05$ を満たす a を求める

VaR

ここでは, 一般的な VaR を定義する.

- 収益率 $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする
- $P(R \leq a) = 0.05$ を満たす a を求める
- 問題 ③と同様にすると, $a = \mu - 1.64\sigma$

VaR

ここでは, 一般的な VaR を定義する.

- 収益率 $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする
- $P(R \leq a) = 0.05$ を満たす a を求める
- 問題 ③と同様にすると, $a = \mu - 1.64\sigma$
- $\text{VaR} = -(\mu - 1.64\sigma)$ (リスクなので, 数値の大きい方が危険性が高いことを示すためにマイナス記号をつけている)

推定(株式データを集める)

VaR を求めるためには, 収益率の分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の μ, σ^2 を推定する必要がある. これは以下の手順で推定する.

- 収益率のデータの作成まず株式データを集めます.

月日	株価
2011/02/01	446
2011/03/01	396
2011/04/01	382
2011/05/01	359
2011/06/01	378
2011/07/01	388

推定 (収益率の計算)

収益率を求めます. T 月の収益率であれば,

$$T \text{ 月の収益率} = \frac{T \text{ 月の株価}}{(T - 1) \text{ 月の株価}} - 1$$

と計算します. 例えば7月の収益率であれば,
 $(388/378) - 1 = 0.0265$ となります.

月日	株価	収益率
2011/02/01	446	
2011/03/01	396	-0.1121
2011/04/01	382	-0.0354
2011/05/01	359	-0.0602
2011/06/01	378	0.0529
2011/07/01	388	0.0265

推定

このようにして得られた収益率のデータを $r_1, r_2, \dots, r_n$ としたとき, μ, σ^2 は, その標本平均と標本分散

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$$

で推定します.

数値例

- りそな銀行の株価（出典:Yahoo ファイナンス）

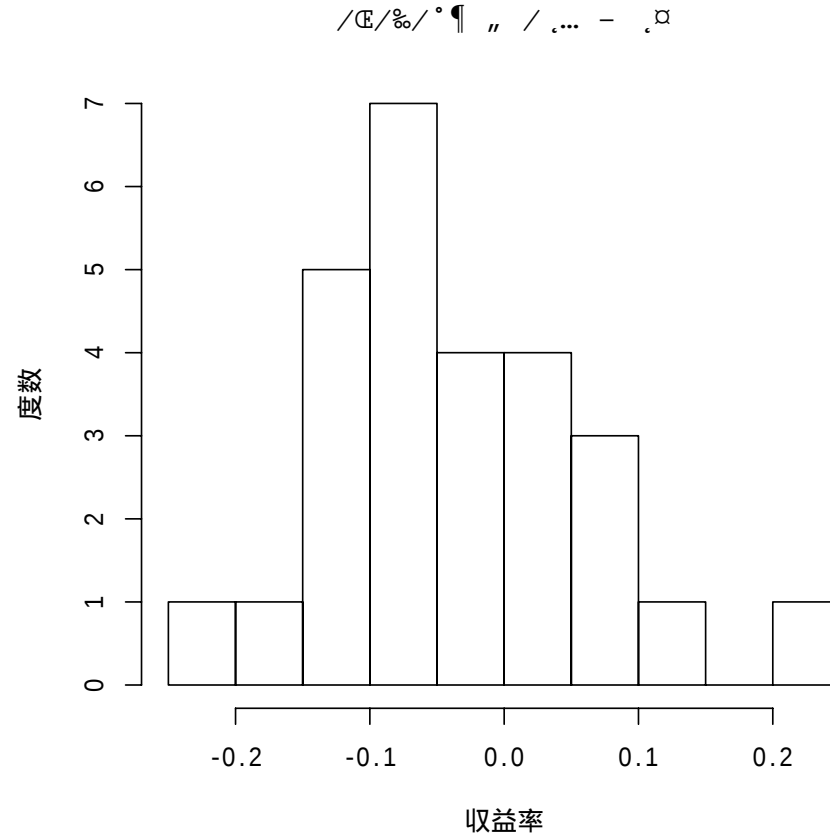
月日	株価	収益率
2009/04/01	1316	
⋮	⋮	⋮
2011/04/01	382	-0.0354
2011/05/01	359	-0.0602
2011/06/01	378	0.0529
2011/07/01	388	0.0265

$\mu = -0.0402$, $\sigma^2 = 0.008324$ と推測. $\sigma = 0.0911$ より
 $\text{VaR} = -(-0.0402 - 1.64 * 0.0911) = 0.1896$ となります.

- ちなみに平均や分散は，電卓でも面倒ですから Excel のような計算ソフトを用いることをお勧めします.

VaRの問題点

- そもそも収益率の確率分布は正規分布で良いのか?



- 1ヶ月後の収益率に対してもっと良い予測ができないものか? (→ 時系列解析)

この2つの問題は現在でも議論されている問題ですので、興味のある方は挑戦してもよいかもしれません