数理統計学演習問題

学部　　組　　番　氏名 ____________________

[1] 以下の定積分を計算せよ.

① $\int_0^2 \frac{3}{4}x^2(2-x)dx$

② $\int_0^\infty e^{-\theta x}dx$ ($\theta > 0$ は定数)

③ $D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$,
$\iint_{D_1}(x+y)^2 dxdy.$

④ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y dxdy$

⑤ $D_2 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\}$,
$\iint_{D_2}(x+y)^2 dxdy.$

⑥ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2+y^2)^{-3/2}dxdy$

[2] $A > 0$, $B > 0$ は定数とする.

$$\int_0^\infty x^A exp(-Bx)dx = \boxed{ア}\Gamma(\boxed{イ}) \qquad (1)$$

ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数. この時, $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ に入る値を A, B を用いて答えよ. (ヒント:置換積分 $Bx = y$ を用いる.)

[3] 表が出る確率が $\frac{2}{5}$ の歪んだコインを 3 回振る. 表が出た回数を X とするとき, 以下の問に答えよ.

① $P(X = 2)$ を求めよ.

② X の確率分布を求めよ.

③ $E[X]$ を求めよ.

④ $V[X]$ を求めよ.

⑤ 標準偏差 $D(X)$ を求めよ

[4] X の確率密度関数を $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $(x \ge 0)$ とする. ここで $\theta > 0$ は定数.

① $E(X)$ を求めよ.

② $V(X)$ を求めよ.

[5] $X \sim B(n,p)$ とする.

① X の積率母関数 (m.g.f.)$g_X(t)$ を求めよ.

(ヒント:2 項定理 $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k}$ を用いる.)

② [5]①を用いて $E[X]$, $V[X]$ を求めよ.

[6] X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. このとき, $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ はどのような確率分布に従うか

[7] 確率変数 X, Y は同時確率密度関数を $f_{XY}(x,y)$ を持つ.

① 共分散の計算公式

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ を証明せよ.

② X と Y が独立の時, $Cov(X,Y)$ の値を求めよ.

[8] 2 次元確率ベクトル $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ は 2 次元正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うとする.

ここで $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.

① $\rho = 0$ とする時, X と Y が独立であることを証明せよ. (ヒント:$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ を示せば良い)

[9] $f(x) = \sin x$ の $x = 0$ の周りでの (3 次の剰余項を持つような) テイラー展開を求めよ.

[10] $X_1, ...X_n$ は互いに独立で, 同一の分布に従う確率変数とする. $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ とする. この時 $E(S^2)$ を以下の手順で求めよ.

① $E[(\bar{X})^2]$ を求めよ.

② $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right]$

③ $E(S^2)$ を求めよ.

(ヒント:①, ②はどこかで分散の計算公式を用いると簡単に求められる)

[11] $X_1, ...X_n$ は互いに独立な確率変数とし, $E(X_i^2) = \mu_2'$, $V(X_i^2) = A$, $(i = 1, ..., n)$ $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ とする.

① $E[\overline{X^2}]$ を求めよ.

② $V[\overline{X^2}]$ を求めよ.

③ $\overline{X^2} \xrightarrow{P} E(X_1^2)$ を示すこと. (ヒント:①, ②は μ_2', A を用いて表す.)

[12] $X_1, ...X_n$ は互いに独立に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. ここで $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2) \\
Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3) \\
Y_3 &= \frac{1}{\sqrt{12}}(X_1 + X_2 + X_3 - 3X_4) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
Y_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} - (n-1)X_n)
\end{aligned}
$$

とおく.

① $E(Y_i)$ $(i = 1, 2)$ を求めよ

② $V(Y_i)$ $(i = 1, 2)$ を求めよ

③ $Cov(Y_1, Y_2)$ を求めよ

④ $Cov(\bar{X}, Y_2)$ を求めよ.

(ヒント:① 実は $E(Y_i) = 0$, $(i = 1, .., n-1)$ となる. ③ ,④は $E(X_i - \mu)(X_j - \mu) = 0$, $i \neq j$ を用いる)

[13] 表が出る確率が p であるようなコインを n 回投げた時の結果を, 互いに独立な確率変数で $X_1, X_2, ..., X_n$ と表すことする. ここで X_i は i 回目のコインで表がでれば 1, 裏が出れば 0 という値を取るようにきめる. 即ち

X_i	1	0	計
確率	p	$1-p$	1

n が大きなとき, 標本平均 $\bar{X}$ は漸近的にどのような分布に従うか? (ヒント:中心極限定理を用いる)

[14] $X_1, ...X_n$ は互いに独立に指数分布 $p(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$ に従う. ここで $\theta > 0$ を未知のパラメーターとする. この時, θ のモーメント推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ.

[15] $X_1, ...X_n$ は互いに独立に $p(x; \beta) = \frac{\beta^2}{\Gamma(2)} x e^{-\beta x}$ に従う. ここで $\beta > 0$ を未知のパラメーターとする. この時, β の最尤推定量 $\hat{\beta}$ を求めよ.

[16] $X_1, ...X_n$ は互いに独立で, 同一の分布に従う確率変数とする. $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ とする. この時, S^2 と S_0^2 どちらが不偏推定量か? また理由も述べよ.

(ヒント:[10] の結果を用いる)

[17] [10] の S^2 において, 以下のことが知られている.

$$V(S^2) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right), \qquad (2)$$

ここで $\mu_4 = E[(X - \mu)^4]$.

① S^2 の σ^2 に対する平均 2 乗誤差 $MSE_\theta(S^2)$ を求めよ.

② $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ を示すこと. (ヒント:マルコフの不等式を用いる)

[18] $X_1, ...X_n$ は互いに独立にポアソン分布 $p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ に従うとする. ここで $\lambda > 0$ を未知のパラメーターとする. この時, λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ を求めよ. また $\hat{\lambda}$ に対する平均 2 乗誤差 $MSE_\theta(\hat{\lambda})$ を求めよ.

[19] $X_1, ...X_{16}$ は互いに独立に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. ここで μ, σ^2 を未知のパラメーターとする. この時, 標本平均 $\bar{X}$ の実現値は 65 で, 不偏分散 S_0^2 の実現値は 81 であった. この時, μ に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ.

1　追加問題

[20] 確率変数 X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っている．この時, $V[X] = \sigma^2$ となることを示すこと．

[21] 確率変数 X は確率密度関数 $f_X(x) = \frac{3}{4}x(2-x)$, $(0 \leq x \leq 2)$ を持つとする．

① 確率変数 Y の取りうる範囲を求めよ．

② $Y = 3X + 2$ とおく時, Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．

[22] 確率変数 X は確率密度関数 $f_X(x)$ を持つとする．$Y = aX + b$, (a, b は定数) とおく時, Y の確率密度関数は $f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ となることを示すこと．

[23] 確率変数 X は以下の確率密度関数を持つとする．

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}. \tag{3}$$

この確率分布を**一様分布**と言い, $U(a,b)$ と略記する．

① $E(X)$ を求めよ

② $V(X)$ を求めよ

[24] X の確率密度関数を $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $(x \geq 0)$ とする．ここで $\theta > 0$ は定数．この時, X の積率母関数 (m.g.f.)$g_X(t)$ を求めよ．

[25] 以下の同時分布を考える．

$X \backslash Y$	0	1	計
0	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$
1	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$
計	$\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}$	1

この時, X と Y の共分散 $Cov(X,Y)$ を求めよ．

[26] X と Y の同時密度関数を

$$f_{XY}(x,y) = \frac{36}{5}xy(1-xy), \qquad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

とする．

① X の周辺密度関数を求めよ．

② $E(X)$ を求めよ．

③ X と Y の共分散を求めよ．

2　解答

[20] $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ とおくと

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \end{aligned}$$

ここで部分積分を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -z \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right\}' dz$$

$$= \left[-z\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$= 1$$

より $V[X] = \sigma^2$ となる．

[21] ① Y の取りうる範囲は $2 \leq Y \leq 8$ である．②

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(3X + 2 \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y-2}{3}\right) \\ &= \int_2^{\frac{y-2}{3}} \frac{3}{4} t(2-t) dt \end{aligned}$$

これより, 両辺を y で微分すると

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{3}{4}\frac{y-2}{3}\left(2 - \frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{36}(y-2)(8-y), \quad (2 \leq y \leq 8). \end{aligned}$$

[22]

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(aX + b \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(t) dt \end{aligned}$$

これより, 両辺を y で微分すると

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

よって示せた.

[23] ① $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

[24] $t<\theta$ の時, $g_X(t)=\displaystyle\int_0^\infty e^{tx}\theta e^{-\theta x}dx=\int_0^\infty \theta e^{-(\theta-t)x}dx=\theta\int_0^\infty e^{-y}\frac{1}{\theta-t}dy=\frac{\theta}{\theta-t}$. $t\geq\theta$ の時, $g_X(t)$ は発散する.(即ち積分が無限大になる)

[25] $E(X)=\dfrac{8}{20}$, $E(Y)=\dfrac{8}{20}$,

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=(0-\frac{8}{20})(0-\frac{8}{20})\frac{6}{20}\\&+(0-\frac{8}{20})(1-\frac{8}{20})\frac{6}{20}\\&+(1-\frac{8}{20})(0-\frac{8}{20})\frac{6}{20}\\&+(1-\frac{8}{20})(1-\frac{8}{20})\frac{2}{20}\\&=-\frac{3}{50}\end{aligned}$$

[26] ①

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\frac{36}{5}\int_0^1 xy(1-xy)dy\\&=\frac{6}{5}x(3-2x)\end{aligned}$$

これより

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{6}{5}x(3-2x) & (0\leq x\leq 1)\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}.$$

②

$$E(X)=\int_0^1 x\frac{6}{5}x(3-2x)dx=\frac{3}{5}$$

③

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_0^1\int_0^1 xy\frac{36}{5}xy(1-xy)dxdy\\&=\frac{3}{5}\int_0^1(4y^2-3y^3)dy\\&=\frac{7}{20}.\end{aligned}$$

共分散の計算公式より $Cov(X,Y)=\dfrac{7}{20}-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{100}$.

参考文献 鈴木　武, 山田作太郎 (1996) 数理統計学, 内田老鶴圃. 変数変換, t 分布の導出の仕方が最も標準的な方法で書かれている. ただし最初の確率測度, 特性関数の説明で初学者にとってはきついので、飛ばして読むと良い.

[1] ② $\dfrac{1}{\theta}$ ③ $\dfrac{16}{3}$ ④ $\dfrac{13}{6}$ ⑤ 1. ⑥ 2π

6/23(火) の授業の補足説明.

たたみこみ

連続型確率変数 X と Y は独立とする． この時, $U = X + Y$ の確率分布は

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u - x)dx$$

(X, Y が離散型のとき, $f_U(u) = \sum_x f_X(x) f_Y(u - x)$).

Proof.

$$\begin{aligned}
P(U \leq u) &= P(X + Y \leq u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{u-x} f_{XY}(x, y)dy \right\} dx
\end{aligned}$$

$x + y = t$ とおくと

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{u} f_{XY}(x, t - x)dt \right\} dx$$

x と y は独立より

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{u} f_X(x) f_Y(t - x)dx \right\} dt$$

これより

$$f_U(u) = \frac{d}{du} P(U \leq u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u - x)dx.$$

$\boxed{\text{注意}}$ 微分積分の基本定理 $\frac{d}{du} \int_{-\infty}^{u} h(t)dt = h(u)$ を用いた.

p77 積率母関数に関する定理

- $g_X(\theta) = E(e^{\theta X})$:X の積率母関数
- $g_Y(\theta) = E(e^{\theta Y})$:Y の積率母関数
- $g_U(\theta) = E(e^{\theta U})$:$U = X + Y$ の積率母関数

X, Y が独立のとき,

$$g_U(\theta) = E(e^{\theta(X+Y)}) = g_X(\theta) g_Y(\theta).$$

Proof.

$$\begin{aligned}
g_U(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} f_U(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, u - x)dxdu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} f_{XY}(x, u - x)du \right) dx
\end{aligned}$$

$u - x = y$ と置くと

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x+y)} f_{XY}(x, y)dy \right) dx$$

X, Y は独立より

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x) e^{\theta y} f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} f_Y(y)dy \\
&= g_X(\theta) g_Y(\theta)
\end{aligned}$$