

# 数理統計学における数学的基礎

高崎経済大学 宮田 庸一

授業で用いる記号, 用語の説明

- $\mathbb{R}$  は実数全体の集合を表す. 要素  $x$  が実数の時は  $x \in \mathbb{R}$  と表す.
- $\max$  は実数の最大値を表す. 例えば  $\max(-2, 5, 1) = 5$ .
- $[a, b]$  は区間  $a \leq x \leq b$  を表す. これを閉区間と言う.
- $(a, b)$  は区間  $a < x < b$  を表す. これを開区間と言う.
- $\forall \sim$  任意の  $\sim$

【例】for  $\forall x, x^2 \geq 0$

(任意の  $x$  に対して  $x^2 \geq 0$  が成り立つ. ちなみにこれは正しい命題)

- $\exists \sim$  s.t.,  $\dots \dots$  を満たす  $\sim$  が存在する

ここで  $\exists$  は存在する. s.t. は such that の略語である.

【例】 $\exists x$  s.t.,  $x^2 - 1 = 0$

( $x^2 - 1 = 0$  を満たす  $x$  が存在する)

## 1 総和記号 ( $\sum$ の計算)

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$  を簡単に書き表すために, 以下のように記号  $\sum$  (シグマ) を用いて表します.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

これは  $a_k$  に  $k = 1$  を代入した  $a_1$  から  $a_k$  に  $k = n$  を代入した項  $a_n$  までをすべて足し合わせたものという意味で使います. 以下がその例です.

【例 1.1】

$$\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

$$\sum_{k=1}^4 5k = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4$$

$$\sum_{k=1}^4 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$\sum_{k=1}^3 (a_k + b_k) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$$

$\sum_{i=1}^n 1$  は 1 という項が  $n$  個足し合わせたものとします. ここで,  $\sum$  に関する重要な性質がりますので簡単に紹介したいと思います.  $c$  は定数とします.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n c = nc$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \textcircled{6} \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

①は  $k$  に無関係の数  $c$  は  $\sum$  の外に出してよいということを意味しています. また ④から ⑥までは証明する必要がありますが, 実際の統計では使いませんのでここでは省略します.

【①の例】

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 5a_k &= 5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4 + 5a_5 \\ &= 5(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 5 \sum_{i=1}^5 a_i \end{aligned}$$

これより ①が成り立つことがわかんと思います。

【例 1.2】

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 - k) &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1) - (n+1)\} \\ &= n^2(n+1). \end{aligned}$$

## 1.1 2重総和記号

2重総和記号を

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m x_{ij} \right)$$

と定義する。

【例 1.3】

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^2 x_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (x_{i1} + x_{i2}) \\ &= (x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22}) + (x_{31} + x_{32}) \end{aligned}$$

この時、以下の定理が成り立つ。

- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i a_j = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^m a_j \right)$

さらに3重総和記号も  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l x_{ijk} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^l x_{ijk} \right) \right)$  のように定義する。

問 1.2  $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 j^i$  を求めよ。

## 1.2 $\sum$ を用いない統計量の表し方

$\sum$ を用いた表し方	$\sum$ を用いない表し方
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$s_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$

- 相関係数を  $\Sigma$  を用いた表した場合

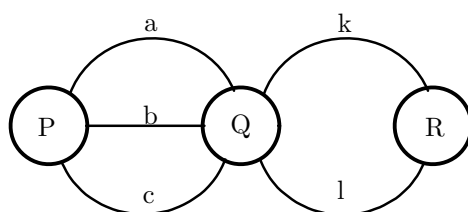
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

- 相関係数を  $\Sigma$  を用いないで表した場合

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

## 2 積の法則

線路が P 駅と Q 駅の間に 3 本, Q 駅と R 駅の間に 2 本あるとき, P 駅から Q 駅を経由して R 駅に行く方法は何通りあるか求めてみましょう。



上の図で, P 駅から Q 駅へ行く方法は a, b, c の 3 通りあり, それぞれについて, Q 駅から R 駅へ行く方法が k, l の 2 通りあります。ですから P 駅から Q 駅を経由して R 駅へ行く方法の数は  $3 \times 2 = 6$  となります。つまり全部で 6 通りの方法があることがわかります。一般に, 以下の積の法則が成り立ちます。

### 積の法則

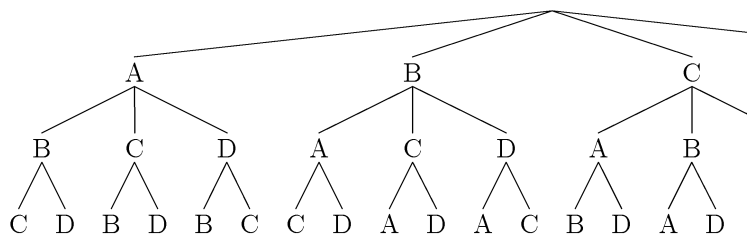
事柄 A の起こり方が  $m$  通りあり, それぞれについて事柄 B の起こり方が  $n$  通りあるとします。このとき A と B がともに起こる場合は  $mn$  通りある。

【例】: 3 種類の統計の教科書と 5 種類の英和辞典からそれぞれ 1 種類づつ選んで計 2 冊の組をつくる方法は何通りあるか?

解: 3 種類の統計の教科書おのおのに対し, 5 種類の教科書があるので, 積の法則より  $3 \times 5 = 15$  となる。よって 15 通りある。

## 3 順列 (Permutation)

A, B, C, D の 4 個の文字の中から異なる 3 個を取り, 1 列に並べた時の場合の数を求めたい。これは以下の樹形図を用いるとすぐにわかるが, ここではそれを用いないで考えてみる。



ここで A, B, C, D の文字のうち 3 つを枠  $\bigcirc \triangle \square$  に当てはめることを考えればよい。第 1 文字  $\bigcirc$  の取り方は A, B, C, D の 4 通りある。第 2 の文字  $\triangle$  の取り方は, 第 1 文字を除いた残りの 3 文字から 1 つ取ればよいので,

3通りある。第3の文字□の取り方は、第1と第2の文字を除いた残りの2つから1つ取ればよいから、2通りある。よって、配列の総数は積の法則より

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

となる。ここで一般に、異なる  $n$  個のものの中から異なる  $r$  個を取り出して1列に並べることを、 $n$  個から  $r$  個取る順列 といい、その総数を  ${}_n P_r$  で表す。上の例では、4個から3個取る順列で、その総数は

$${}_4 P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

となる。同様にして、 $n$  個から  $r$  個取る順列の総数  ${}_n P_r$  を求めよう。

1番目のものの取り方は  $n$  通りある。

2番目のものの取り方は  $n - 1$  通りある。

3番目のものの取り方は  $n - 2$  通りある。

以下同様に考えますと、 $r$  番目のものの取り方は  $n - (r - 1)$  通りあります。ということは積の法則を用いまずと次の事が成り立ちます。

$${}_n P_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ 個}}$$

【例】：6人から4人選んで1列に並べる順列の総数は

$${}_6 P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

### 3.1 階乗

異なる  $n$  個のものから  $n$  個取り出してすべて並べる順列の総数を  $n$  の階乗といい、記号  $n!$  で表す。即ち  $n! = {}_n P_n$  ですので

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

となります。ただし便宜上  $0! = 1$  とします。

【例】6個の文字 a,b,c,d,e,f 全部を1列に並べる順列

その総数  $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

## 4 組み合わせ (Combination)

4個の文字 a,b,c,d の中から異なる3個の文字を選んで作ることができる組は、文字の順序を問題にしなければ、次の4通りとなる。

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \tag{4.1}$$

一般に  $n$  個のものの中から異なる  $r$  個のものを取り出し、順序は考慮しないで1組にしたものを、 $n$  個から  $r$  個取る組み合わせといい、その総数を  $\binom{n}{r}$  で表す。例えば、上の(1)から  $\binom{4}{3} = 4$  となります。

### 4.1 組み合わせに関する公式

例えば(4.1)の組の1つ、 $\{a, b, c\}$  について、その3文字  $a, b, c$  を並べてできる順列は

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba \tag{4.2}$$

で全部で  $3!$  通りある。これは、他のどの組についても、同じであるから、全体では  $\binom{4}{3} \times 3!$  通りの順列が得られる。これは、4個から3個取る順列の総数と一致するから

$$\binom{4}{3} \times 3! = {}_4P_3$$

ゆえに

$$\binom{4}{3} = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

と言える。n個からr個取る組み合わせについても、上記の内容と同様に考えると  $\binom{n}{r} \times r! = {}_n P_r$  となります。これをまとめますと、

$$\begin{aligned} \bullet \binom{n}{r} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad \text{特に } \binom{n}{n} = 1 \\ \bullet \binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

上の公式が  $r=0$  のときも成り立つように、 $\binom{n}{0} = 1$  とする。

$$\text{【例】: } \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84, \quad \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35, \quad \binom{5}{1} = 5$$

$$\text{問 } \binom{8}{6} \text{ を求めよ. (答え } 28)$$

## 4.2 2項定理 (Binomial Theorem)

今、 $(a+b)^2$ ,  $(a+b)^3$ ,  $(a+b)^4$  を展開すると、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

となることがわかる。実はこの展開には規則性があり、以下の式が成り立つことが知られている。これを2項定理と言う。

2項定理

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n. \quad (4.3)$$

ここで  $a^0 = 1$ ,  $b^0 = 1$ ,  $\binom{n}{r} = {}_n C_r$  に注意してください。2項定理は  $\sum$  (シグマ) 記号を用いると

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

と表すことができる。

【2項定理の考え方】 $(a+b)^n$  の展開式において  $a^{n-r} b^r$  の係数がどうなるのかが分かればよい。

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

より項  $(a+b)$  が  $n$  項並べたものと考えることができる。

ここで  $a^{n-r} b^r$  は  $n$  個の項から  $r$  個の項を選ぶ組み合わせを考えればよい。これより  $\binom{n}{r}$  となる。

【例】 $(a+b)^3$  の  $a^2 b$  の係数であれば、 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$  より  $\binom{3}{1} = 3$  となる。

## 5 確率 (Probability)

1 個のさいころを投げるとき、出る目の数は

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

のうちどれかではありますが、どの目が出るかは偶然によって決まりますよね。ここで以下の言葉を紹介します。

試行 (Trials): 同じ状態のもとで繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まる実験や観測のこと。上の例では、さいころを 1 回投げる試行をする、というような表現をします。

事象 (Events): 試行の結果起こる事柄 (ことがら)。事象は  $A, B, C$  などの文字を用いて表される。

全事象: ある試行において起こりうる全ての場合の集まり。

$n(A)$ : 事象  $A$  の要素の個数を表します。

具体例を 1 つ挙げましょう。さいころを 1 回振ることを考えましょう。このとき全事象は  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  となります。ここで事象  $A = \{1, 3\}$  とおくと、 $A$  はさいころを 1 回振ったときに 1 の目か 3 の目が出るということの意味することになります。またこの場合  $A$  の要素は 2 個ありますので  $n(A) = 2$  となります。

### 5.1 確率の定義

1 つの試行において、事象  $A$  の起こることが期待される割合を事象  $A$  の起こる確率といい  $P(A)$  と表します。ここで  $P(A)$  は以下のように決めます。

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ がおこる場合の数}}{\text{起こりうる全ての場合の数}}$$

【例】 1 個のさいころを投げる時、奇数の目が出る確率を考えてみましょう。全事象を  $U$ 、奇数の目がでるという事象を  $A$  とおくと  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 、 $A = \{1, 3, 5\}$  となります。これより  $n(U) = 6$ 、 $n(A) = 3$  となりますので、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

となります。

## 6 指数

•  $a$  を  $m$  個掛けあわせたものを  $a^m$  と表す。即ち

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個}} = a^m.$$

•  $a \neq 0$  に対して  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  と定義する。

【例】:  $2^0 = 1$ ,  $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ,  $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ ,  $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ .

•  $p$  を整数、 $q$  を正の整数とする。このとき

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

と定義します。つまり  $a^{\frac{p}{q}}$  は  $a^p$  の  $q$  乗根とすることです。

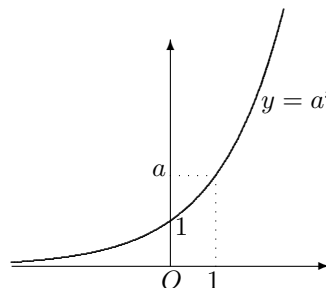
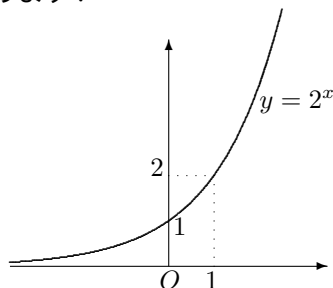
【例】:  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ,  $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

## 6.1 指数関数

今、実数  $x$  に対して  $y = 2^x$  という関数を考えましょう。ここで  $x$  にいろいろな値を代入して  $2^x$  の値を計算すると以下ようになります。

$x$	...	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...
$y = 2^x$	...	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4	...

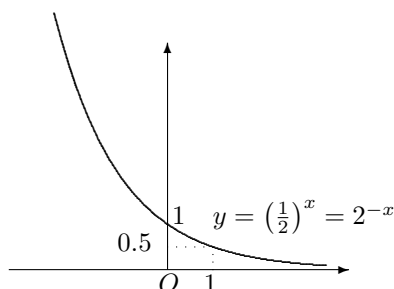
この表をもとにして  $y = 2^x$  のグラフを書きますと左下の図のようになります。 $2^x > 0$  で  $2^0 = 1$  ですから、このグラフは  $x$  軸上にあり、 $y$  軸との交点は  $(0, 1)$  となります。同様にしまして  $a > 1$  の時、 $y = a^x$  もは右下の図のようになります。



一方で  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  は

$x$	...	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...
$y = 2^{-x}$	...	4	2.83	2	1.41	1	0.71	0.5	0.35	0.25	...

となりますのでこれをグラフであらわすと左下のようになります。



## 6.2 $e$ という記号は何ですか?

$e$  というのは、一言でいいますと  $e = 2.7182 \dots \div 2.7$  という数を表します。これは

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

という  $h$  の式において、 $h$  を 0 に近づけていくと、 $(1+h)^{\frac{1}{h}}$  はある値に近づくことが知られています。(下の表を見てください) それを記号で  $e$  とおいた訳です。

$h$	$(1+h)^{1/h}$	$h$	$(1+h)^{1/h}$
0.1	2.59374246	-0.1	2.867971991
0.01	2.704813829	-0.01	2.731999026
0.001	2.716923932	-0.001	2.719642216
0.0001	2.718145927	-0.0001	2.718417755
0.00001	2.718268237	-0.00001	2.71829542

この  $e$  のことをネピアーの数とよびます。数学的には  $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$  と表されます。

## 7 対数

$\log_a b$  という記号は  $a$  を何乗したら  $b$  になるかを表しています。例えば  $\log_2 8$  というのは“2 を何乗したら 8 になるのですか”ということを知りたいので  $2^3 = 8$  となることより

$$\log_2 8 = 3$$

となります。即ち

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

を意味しています。ここで  $\log_a b$  の  $a$  のことを底と呼びます。

【例 7.1】 •  $\log_3 9 = 2$  ( $\leftarrow 3^2 = 9$  より)

•  $\log_3 1 = 0$  ( $\leftarrow 3^0 = 1$  より)

ただし  $\log_3 5$  のような数は手では計算できないので、コンピューターを利用することになる。また対数にはいくつかの重要な性質があります。

対数の性質

$$\textcircled{1} \log_a CD = \log_a C + \log_a D$$

$$\textcircled{2} \log_a \frac{C}{D} = \log_a C - \log_a D$$

$$\textcircled{3} \log_a C^r = r \log_a C$$

詳しい証明は省略するが、興味のある方は矢野、石原 [1] を参考にしてください。特に重要なのは  $\log e^c = c \log e = c$  より、

$$\log e^c = c$$

が成り立つことです。

【例 7.2】 •  $\log 10 = \log 2 \cdot 5 = \log 2 + \log 5$

•  $\log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$

•  $\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 2$

•  $\log e^{-2x} = -2x$

問 7.1  $\log 2 = 0.6931$ ,  $\log 3 = 1.0986$  とする。この時、以下の値を求めよ。

$$\textcircled{1} \log \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{2} \log 9$$

$$\textcircled{3} \log 6$$

## 8 微分

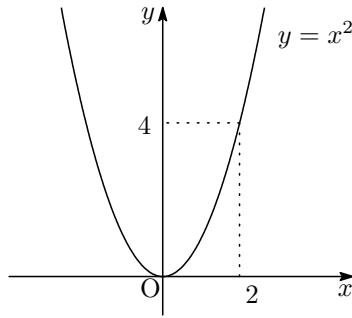
### 8.1 極限

関数  $f(x)$  において、 $x$  が  $a$  と異なる値を取りながら  $a$  に近づくと、 $f(x)$  がある一定の値  $b$  に近づく場合、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \text{もしくは} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a)$$

と書き、 $b$  を  $x \rightarrow a$  のときの  $f(x)$  の極限值と言う。





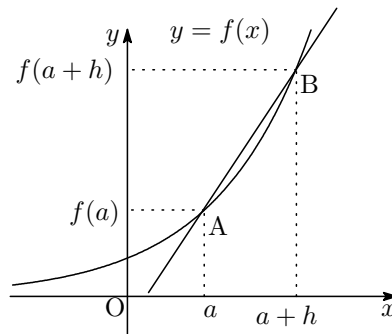
この時、 $y = x^2$  のグラフから、 $x$  を 2 に近づけると  $y$  は 4 に近づくことが分かります。これより  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$  となる。 $f(x)$  がつながっている関数 (これは連続関数と言います) であれば  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  は  $f(x)$  の  $x$  に  $a$  を代入することで極限值を得ることができます。

問 8.1 以下の極限值を求めよ。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2)$     (2)  $\lim_{t \rightarrow 0} (t + 1)^2$     (3)  $\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + 2s + 5)$

## 8.2 微分

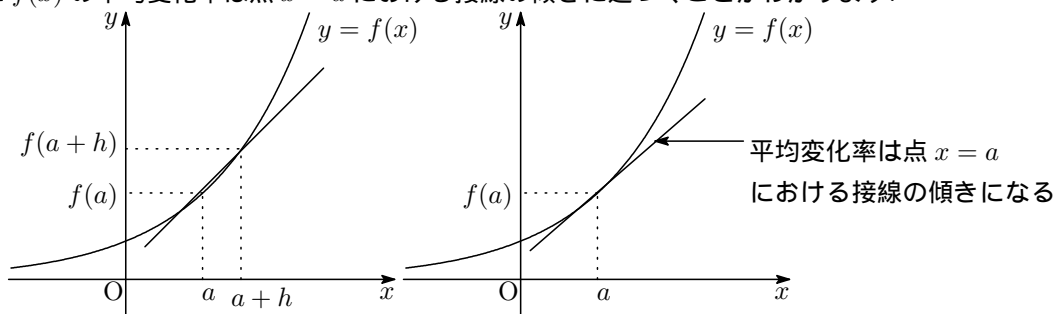
関数  $y = f(x)$  において、 $x$  の値が  $a$  から  $a + h$  まで変化するときの  $y$  の変化量は  $f(a + h) - f(a)$  となることがわかります。



ここで直線 AB の傾き

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を  $x$  が  $a$  から  $a + h$  まで変化するときの  $f(x)$  の平均変化率と言います。ここで  $h$  を 0 に近づけると、下図のように  $f(x)$  の平均変化率は点  $x = a$  における接線の傾きに近づくことがわかります。



これより

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

とし、これを  $f(x)$  の  $x = a$  における微分係数と言い  $f'(a)$  と表します。また  $f'(a)$  以外に  $\frac{df(a)}{dx}$  という表し方もあるので注意してください。

ロピタル (de l'Hopital) の定理

仮定 A:  $x = a$  以外の各点で,  $f(x), g(x)$  は微分可能かつ  $g'(x) \neq 0$ .

ここで  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  の時,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

ここで  $a, l$  は  $\pm\infty$  の値を取ってもよい.

証明: 鈴木 他 [6] 参照

ロピタル (de l'Hopital) の定理その 2

上の仮定 A が成り立つとする.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  の時,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

ここで  $a, l$  は  $\pm\infty$  の値を取ってもよい.

【例 8.1】 •  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 1) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 1) = \infty$  より,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$$

•  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 0$  より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

問 8.2 以下の値を求めよ.

- ①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
- ②  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2/2}$

### 8.3 高次の無限小

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{8.1}$$

の時,  $f(x)$  は  $g(x)$  より高次の無限小と言い,  $f(x) = o(g(x))$  と書く. これは  $x \rightarrow \infty$  とした時,  $f(x)$  は  $g(x)$  より速く 0 に近づくことを意味している. これより, 以下のことが成り立つ.

•  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$

【例】

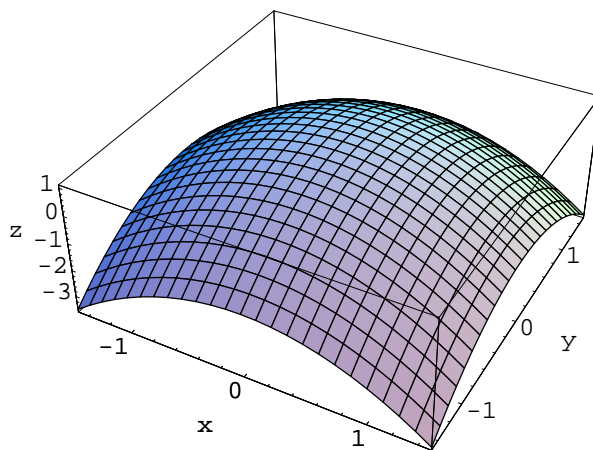
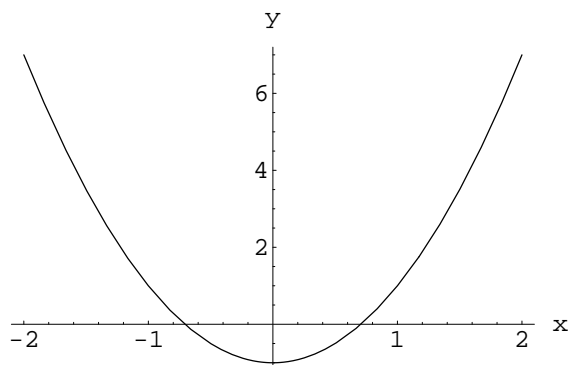
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \tag{8.2}$$

より  $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\log x}\right)$ .

## 9 偏微分

### 9.1 2変数関数

これまでは左下のグラフの  $y = 2x^2 - 1$  のように  $y$  を  $x$  を用いて表してきました。これは一般的には  $y = f(x)$  として表しました。一方で  $z$  を  $x, y$  という2つの変数で表すことを考えてみます。例えば  $z = 1 - x^2 - y^2$  とすると、右下のグラフより、これは3次元空間における曲面になることがわかります。これは一般的には  $z = f(x, y)$  と表します。また  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  のように表すこともあります。



### 9.2 偏微分

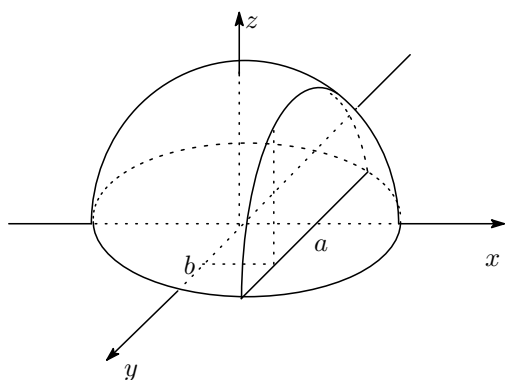
関数  $z = f(x, y)$  の点  $(a, b)$  における  $x$  に関する偏微分は  $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$  もしくは  $f_x(a, b)$  のように表し、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (9.1)$$

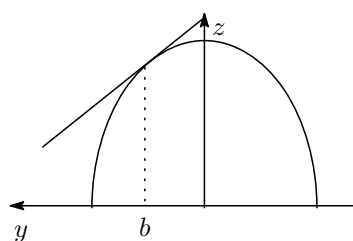
と定義します。同様にして関数  $z = f(x, y)$  の点  $(a, b)$  における  $y$  に関する偏微分も  $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b)$  もしくは  $f_y(a, b)$  と表し

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \quad (9.2)$$

と定義します。ここで  $y$  に関する偏微分のイメージを説明します。



$x = a$  の平面で曲面を切る



$x = a$  での断面  
その  $x = a$  における切り口を2次元のグラフで表し、  
 $z = f(a, y)$  を  $y = b$  の点で微分したのが  $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b)$  となる。

これは言い換えますと、曲面  $z = f(x, y)$  において  $x = a$  と固定したときの、 $y = b$  における接線の傾きが  $y$  に関する偏微分だということが出来ます。次の偏微分の計算の仕方を説明します。

【例 9.1】  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  の点  $(1, 2)$  における  $x$  に関する偏微分を求めます。

(1)  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  に  $y = 2$  を代入。

(2)  $f(x, 2) = 1 - x^2 - 2^2 = 3 - x^2$  を点  $x$  で微分すると  $\frac{df(x, 2)}{dx} = -2x$ .

(3)  $x = 1$  を代入すると、偏微分  $\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = -2$  を得る.

問 9.1  $f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2 + xy$  とする.

- ① 点  $(1, 0)$  における  $x$  に関する偏微分を求めよ.
- ② 点  $(1, 1)$  における  $x$  に関する偏微分を求めよ.
- ③ 点  $(1, 2)$  における  $x$  に関する偏微分を求めよ.

### 9.3 偏導関数

偏微分では、問 9.1 のように  $y$  のそれぞれの値  $b$  に対して偏微分  $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$  を対応させると、1 つの新しい関数が得られます. この新しい関数を  $z = f(x, y)$  の  $x$  に関する偏導関数と言い、 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ ,  $f_x(x, y)$  で表します.

関数  $z = f(x, y)$  の  $x$  に関する偏導関数は

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad (9.3)$$

と定義します. 同様にして関数  $z = f(x, y)$  の  $y$  に関する偏導関数も

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad (9.4)$$

と定義します. ただし実際の計算では、上の定義は用いません. 計算はいたって簡単で以下のようにします.

【例 9.2】  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  の  $x$  に関する偏導関数を求めます.

これは  $y$  を定数だとみなして、 $x$  で微分すればよいということです. よって  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x$  となります.

同様にして  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  の  $y$  に関する偏導関数も、 $x$  を定数だとみなして、 $y$  で微分すればよいので  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -2y$  となります.

問 9.2  $f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2 + xy$  とする時、 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$  を求めよ.

【例 9.3】 偏微分も偏導関数を用いると容易に求められる. ここでは  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  の点  $(1, 2)$  における  $x$  に関する偏微分を求めてみる.

- ①  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x$
- ②  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  の関数に  $(1, 2)$  を代入すると  $\frac{\partial}{\partial x} f(1, 2) = -2 \cdot 1 = -2$ .

これまで 2 変数関数  $z = f(x, y)$  に対する偏微分を考えたが、3 変数の関数  $z = f(x_1, x_2, x_3)$  や、より一般的な  $n$  個の変数の関数  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に対する偏微分も同様に考えることができます.

【例 9.4】  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2 + x_3 x_4 + 1$  とする. このとき、 $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 x_2$ .  $\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$ .

### 9.4 極大値, 極小値

$z = f(x, y)$  が点  $(a, b)$  の近くの任意の点  $(x, y)$  において

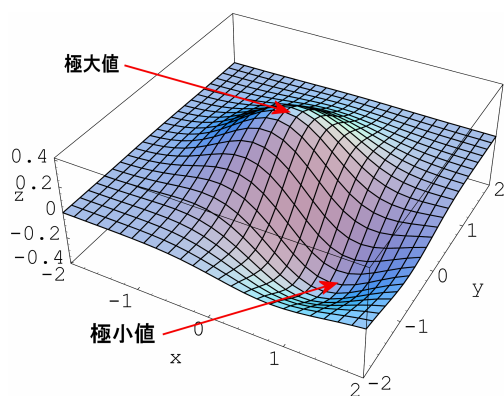
$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad (9.5)$$

を満たすとき  $f(a, b)$  は極大値であると言う. 一方で点  $(a^*, b^*)$  の近くの任意の点  $(x, y)$  において

$$f(x, y) \geq f(a^*, b^*) \quad (9.6)$$

を満たすとき  $f(a^*, b^*)$  は極小値であると言う。また極大値と極小値をあわせたものを極値と言う。

何かわかりづらい定義の仕方だと思いますが、要は周辺と比べて山があってその山の頂上を極大値、凹み（へこみ）があってその一番底の部分が極小値と考えてもらえればよいと思います。



ここで偏微分と極値の関係を一つ紹介します。

極値の性質

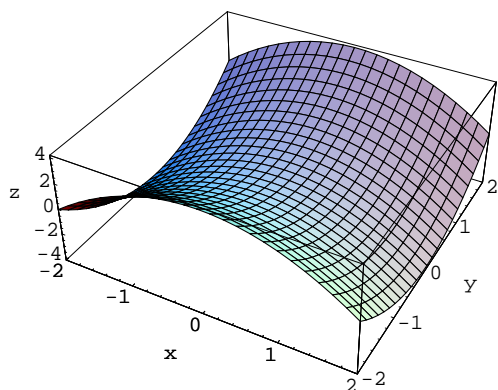
$z = f(x, y)$  が点  $(a, b)$  で極値を持つとき、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0 \quad (9.7)$$

が成り立つ。

ここで式 (9.7) を満たす点を停留点と言う。また  $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$  は  $f(x, y)$  を  $x$  で偏微分した後に  $(a, b)$  を代入したものを意味する。  $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b)$  も同様である。

**注意 1** この定理は式 (9.7) より求められる点  $(a, b)$  は極値の候補を含んでいるが、それらが常に極値になるかどうかはわからない。例えば、 $f(x, y) = y^2 - x^2$  は  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y = 0$  より  $x = 0$ ,  $y = 0$  は停留点ではあるが、極値ではないことは以下のグラフから分かる。



ちょうど点  $(0, 0)$  は乗馬で使う鞍の真ん中の点<sup>i</sup>となっている。

## 10 不定積分

まず不定積分と呼ばれる以下の記号を考えましょう。

$$\int x^2 dx$$

<sup>i</sup>このような点を鞍点（あんでん）と言う。

これは”微分したら  $x^2$  となる関数は何か?”ということを探している記号です。ですから

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

となります。ここで  $C$  は任意の定数です。これは一般的に  $F(x)' = f(x)$  の時には、

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

となります。ここで  $F(x)$  は原始関数と呼ばれ、任意の定数である  $C$  は積分定数と呼ばれています。上の定義からわかるように、 $F(x)$  は微分すると  $f(x)$  になる関数の 1 つです。

【注意】 原始関数は無数にある。例えば  $x^2$  の原始関数であれば

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 + 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + 3, \dots$$

### 置換積分

関数  $x = g(t)$  が  $t$  に関して微分可能であり、 $f(x)$  と  $g'(t)$  が連続である。この時、

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt \quad (10.1)$$

ここで  $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt$  と表せることに注意。

PROOF:  $F(x) = \int f(x) dx$  とおくと

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (10.2)$$

今、 $x = g(t)$  を  $F(x)$  に代入したもの  $F(g(t))$  を  $t$  で微分する。これは合成関数の微分の公式と (10.2) より

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t). \quad (10.3)$$

これより、

$$\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x) dx. \quad (10.4)$$

【例】  $\int x\sqrt{x-1} dx$  を求めよ。

$\sqrt{x-1} = t$  とおくと、 $t^2 = x-1$  より  $x = t^2 + 1$ 。これより  $\frac{dx}{dt} = 2t$ 。よって

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} dx &= \int (t^2 + 1)t \cdot 2t dt \\ &= \int (2t^4 + 2t^2) dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C \quad \sqrt{x-1} = t \text{ を代入すると} \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

【例】  $\int xe^{-x^2} dx$  を求めよ。

$x^2 = t$  とおくと、 $x = \sqrt{t}$ 。  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ 。

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= \int \sqrt{t}e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t} + C \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

【注意】ということとは  $\int f(x)dx$  における不定積分は  $x = g(t)$  とおくと,

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{より形式的に} \quad dx = g'(t)dt$$

として,  $\int f(x)dx$  の  $dx$  に代入. 一方で  $f(x) = f(g(t))$  より

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

となる. つまり  $\frac{dx}{dt}$  は本来は“ $x$  を  $t$  を微分したもの”という意味だったので,  $dx$  と  $dt$  は分けることは出来ないが, あたかも  $dx$  と  $dt$  を数のように扱っていいということになる.

【例 (形式的な計算)】  $\int xe^{-x^2} dx$  を求めよ.

$$x^2 = t \text{ とおくと, } x = \sqrt{t}. \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ より } dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt.$$

$$\int xe^{-x^2} dx = \int \sqrt{t}e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2} \int e^{-t} dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

問 10.1 以下の不定積分を置換積分を用いて答えよ.

- ①  $\int x\sqrt{2x+1}dx$ , (ヒント:  $\sqrt{2x+1} = t$  とおく)
- ②  $\int \frac{1 + (\log x)^2}{x} dx$ , (ヒント:  $\log x = t$  とおく)
- ③  $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ , (ヒント:  $e^x = t$  とおく)
- ④  $\int x(3x-1)^n dx$ , ( $n > 0$ ), (ヒント:  $3x-1 = t$  とおく)

## 11 定積分

### 11.1 有界な関数

閉区間  $D = [a, b]$  において, 任意の  $x \in [a, b]$  に対して,  $m \leq f(x) \leq M$  となる有限な  $m$  と  $M$  が存在する時,  $f(x)$  は  $D$  で有界であると言う.

### 11.2 1次元関数の定積分

関数  $y = f(x)$  は閉区間  $D = [a, b]$  上で定義された有界な連続関数とする. ここで

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とし,  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を  $D$  の分割とし, それらをまとめて  $\Delta$  とする. ここで任意の点  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  をとり, 次の和

$$S_{\Delta, \xi} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (11.1)$$

を考える. ここで分割の幅で最も大きなものを  $|\Delta| = \max_i(x_i - x_{i-1})$  とする. ( $\max$  の詳しい説明は以下の注意を見よ) このとき

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_{\Delta, \xi} = S \quad (11.2)$$

が有限の値を取るとき,  $f(x)$  は  $D$  において積分可能であると言い

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{11.3}$$

と書く. ここで  $D$  を積分範囲という.

**注意 1**  $\max$  において  $i$  の添え字を用いないで表すと

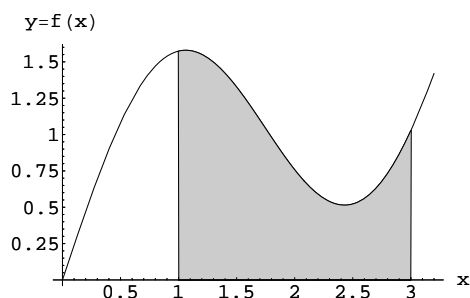
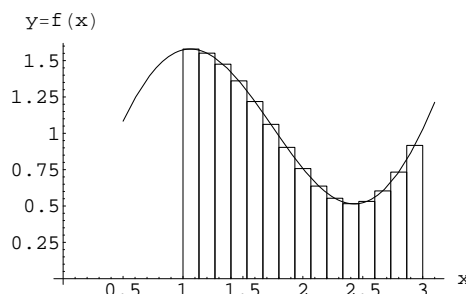
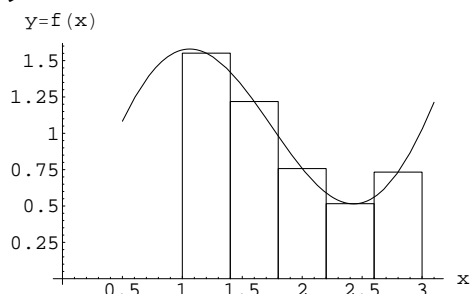
$$\max(x_n - x_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2}, \dots, x_2 - x_1) \tag{11.4}$$

となる.

**注意 2**  $f(x)$  が連続であるとき,  $[x_{i-1}, x_i]$  における  $\xi_i$  のとり方にかかわらず, (10.2) が存在するという定理が知られている.

### 11.3 積分のイメージ

今,  $f(x) \geq 0$  とし, 積分範囲を  $D = [1, 3]$  とする. この時, 定積分の定義は以下のように考えることができます.



曲線と領域  $[1, 3]$  に囲まれた部分の面積を複数の長方形を組み合わせて近似する. そしてその長方形の刻みかたを極限まで細かくしていくと曲線と領域  $[1, 3]$  に囲まれた部分の面積に近づいていく.

つまり定積分  $\int_a^b f(x)dx$  は, 曲線  $y = f(x)$  と領域  $[1, 3]$  において囲まれた面積  $S$  に相当することがわかると思います.

### 11.4 微分積分の基本定理

微分積分の基本定理

$f(x)$  は区間  $I = [a, b]$  で連続とする. 任意の定数  $c \in I$  および  $I$  内を動く変数  $x$  に対して,  $G(x) = \int_c^x f(t)dt$  は  $x$  に関して  $I$  上微分可能で,

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x)$$

が成り立つ.

証明は省略するが, 興味のある方は矢野, 石原 [2] を参照のこと.



【例】  $\frac{d}{dx} \int_0^x (t^2 + 1)dt = x^2 + 1$  を確かめる.

$$\int_0^x (t^2 + 1)dt = \left[ \frac{1}{3}t^3 + t \right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 + x$$

となる. よって  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3}x^3 + x \right) = x^2 + 1$  となる.

定積分と不定積分の関係

$f(x)$  は区間  $I = [a, b]$  で連続とし,  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数の一つとする.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

が成り立つ.

## 11.5 無限積分

$a$  をある定数とする.  $b > a$  を満たす任意の  $b$  に対して  $f(x)$  は  $[a, b]$  で積分可能であると仮定する. この時,  $\int_a^\infty f(x)dx$  は

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (11.5)$$

と定義する. 上の式で, 右辺の項が存在する時,  $f(x)$  は  $[a, \infty)$  で積分可能であると言う. またこの右辺が存在しない時,  $\int_a^\infty f(x)dx$  は発散すると言う. 同様にして

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (11.6)$$

と定義する. また

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_c^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx \quad (11.7)$$

と定義する. ここで  $c$  は有限な任意の数とする. (11.7) 式の右辺の 2 つの項が存在する時,  $f(x)$  は  $(-\infty, \infty)$  で積分可能であると言う. このように無限区間を含む積分を無限積分と言う.

【例】

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x}dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_1^b + \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) + \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 2. \end{aligned}$$

**注意** 実際には  $\infty, -\infty$  を 1 つの数のように扱うことが多い. 例えば

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\infty = -0 + 1 = 1. \\ \int_0^\infty e^{-x}dx &= \left[ -e^{-x} \right]_0^\infty = 1. \end{aligned}$$

問 11.1 以下の定積分は積分可能であるか？ もし積分可能である場合は値も求めよ。

①  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

②  $\int_1^{\infty} x e^{-x^2/2} dx$

③  $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$

## 11.6 無限積分における置換積分, 部分積分

結論から言うと, 通常定積分における部分積分, 置換積分と同じように計算してよい。

【置換積分の例】  $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+2)^2} dx$  に対して置換積分を行う。  $3x+2=y$  と置くと,  $dx = \frac{1}{3} dy$  で, 積分範囲は  $\begin{array}{l|l} x & 1 \rightarrow \infty \\ y & 5 \rightarrow \infty \end{array}$  となるので

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+2)^2} dx = \int_5^{\infty} \frac{1}{y^2} \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{y} \right]_5^{\infty} = \frac{1}{15}.$$

【部分積分の例】

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = [x(-e^{-x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

## 12 2重積分

2変数関数  $z = f(x, y)$  は2次元の区間  $D = [a, b] \times [c, d]$  上で定義された有界な連続関数<sup>ii</sup>とする。ここで

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

とし,  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ) を  $D$  の分割とし, それらをまとめて  $\Delta$  とする。ここで任意の点  $(\xi_i, \eta_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  をとり, 次の和

$$S_{\Delta, \xi, \eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad (12.1)$$

を考えます。ここで分割の幅で最も大きなものを  $|\Delta| = \max_{i,j} (x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1})$  とする。(maxの詳しい説明は以下の注意を見よ) このとき

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_{\Delta, \xi, \eta} = V \quad (12.2)$$

が有限の値を取るとき,  $f(x, y)$  は  $D$  において2重積分可能であると言い

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{もしくは} \quad V = \int_D f(x, y) dx dy \quad (12.3)$$

と書く。ここで  $D$  を積分範囲という。

注意 1 max において  $i, j$  の添え字を用いないで表すと

$$\max(x_n - x_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2}, \dots, x_2 - x_1, y_m - y_{m-1}, \dots, y_2 - y_1) \quad (12.4)$$

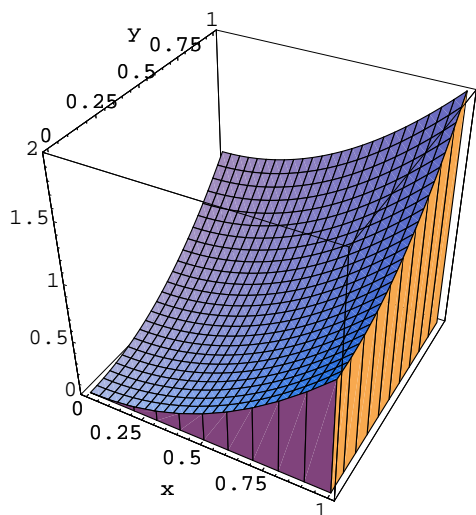
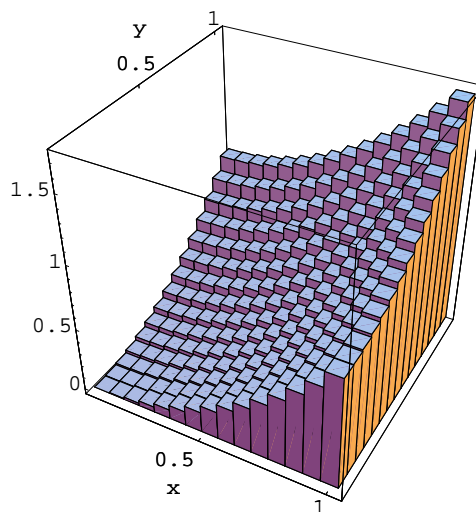
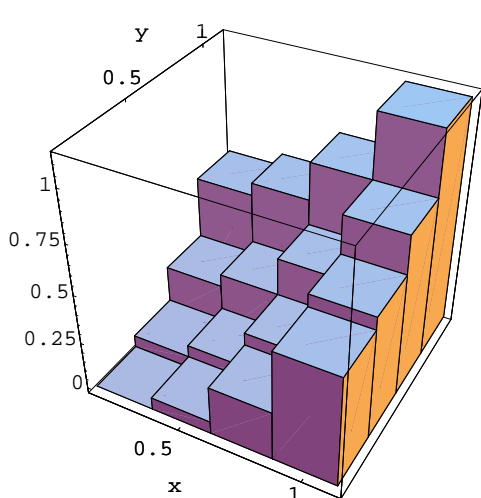
となる。

注意 2  $f(x, y)$  が連続であるとき,  $\Delta_{ij}$  における  $(\xi_i, \eta_j)$  のとり方にかかわらず, (11.2) が存在するという定理が知られている。例えば黒田 p348 [7]。またより一般的な重積分の定義は例えば入江他 [5]p201 を参照。

<sup>ii</sup>ここでは2変数関数が連続であることの厳密な定義には触れない。このため連続であるとは  $f(x, y)$  がつながっている平面であることをイメージしてもらいたい

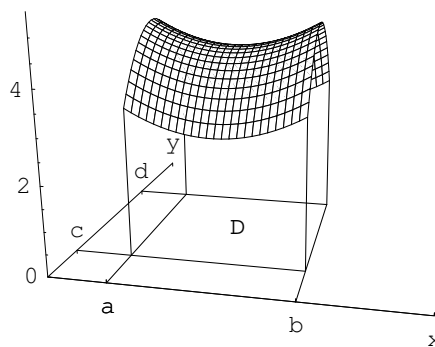
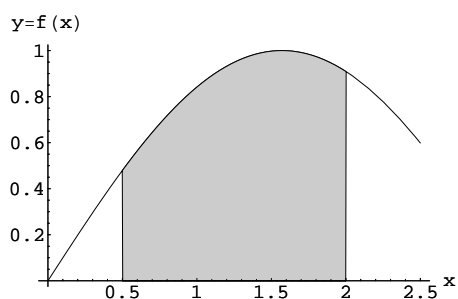
## 12.1 2重積分のイメージ

今,  $f(x, y) \geq 0$  とし, 積分範囲を  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  とする. この時, 以前に説明した定積分の定義は以下のように考えることが出来ます.



曲面と領域  $D$  に囲まれた部分の体積を複数の直方体を組み合わせて近似する. そしてその直方体の刻みかたを極限まで細かくしていくと曲面と領域  $D$  に囲まれた部分の体積に近づいていく.

つまり  $\iint_D f(x, y) dx dy$  は, 曲面  $z = f(x, y)$  と領域  $D$  において囲まれた体積  $V$  に相当することがわかってきます. これは1次元関数  $y = f(x)$  が  $f(x) \geq 0$  の時, その定積分  $\int_a^b f(x) dx$  が区間  $[a, b]$  に囲まれた面積であることを思い出してもらえれば, 自然に拡張されていることがわかるかと思えます. ただし  $w = f(x, y, z)$  のように変数が3個以上あるものについては図で表すことができないので, 数式だけで扱うということになります.



## 12.2 計算方法

ここでは矩形<sup>iii</sup>の領域  $D = [a, b] \times [c, d]$  とする時の  $\iint_D f(x, y) dx dy$  の計算方法を説明します. 実は以下の定理が知られています.

定理

① 任意の  $x \in [a, b]$  に対して  $\int_c^d f(x, y) dy < \infty$  とする. この時  $\int_c^d f(x, y) dy$  は  $x$  について積分可能で

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad (12.5)$$

が成り立つ.

② 任意の  $y \in [c, d]$  に対して  $\int_a^b f(x, y) dx < \infty$  とする. この時  $\int_a^b f(x, y) dx$  は  $y$  について積分可能で

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (12.6)$$

が成り立つ.

③  $f(x, y)$  は  $D$  で連続とする. この時, ①, ②が成り立つ.

証明:ここでは省略するが、詳しい証明は入江, 他 p211[5] を参照のこと.

【計算例】

(1)  $D = [0, 1] \times [0, 2]$ ,  $f(x, y) = \sqrt{x+y}$  とする.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left( \int_0^1 \sqrt{x+y} dx \right) dy \quad y \text{ を定数とみなして積分} \\ &= \int_0^2 \left[ \frac{2}{3} (x+y)^{3/2} \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{2}{3} (1+y)^{3/2} - \frac{2}{3} y^{3/2} \right) dy \\ &= \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{5} (1+y)^{5/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{2}{5} 3^{5/2} - \frac{2}{5} 2^{5/2} - \frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{4}{15} (9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

(2)  $D = [0, 1] \times [1, 2]$ ,  $f(x, y) = x^2 y$  とする.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_1^2 \left( \int_0^1 x^2 y dx \right) dy \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{x^3 y}{3} \right]_0^1 dy \\ &= \int_1^2 \frac{y}{3} dy \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

一般にこれらの積分の形を累次積分と言う.

<sup>iii</sup>2次元においては長方形を意味する.

問 12.1 ①  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$  とする. この時,  $\iint_D (1 - x - y) dx dy$  を計算せよ.

②  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$  とする. この時,  $\iint_D \sin(x + y) dx dy$  を計算せよ.

### 12.3 一般の定義域における定積分

これまでの定積分の定義域  $D$  は矩形であったが, 一般には  $D$  が曲線  $y = g(x), y = h(x)$  ( $g(x) \leq h(x)$ ),  $x = a, x = b$  で囲まれた領域であることもある. この時は以下のようにして定積分を行う.

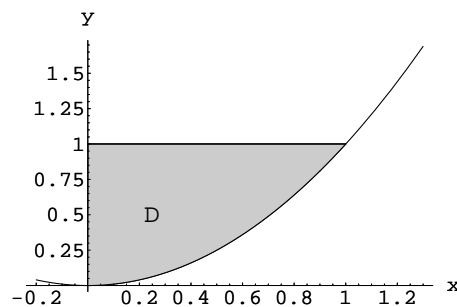
定理

$f(x, y)$  は  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$  で連続な関数とする. この時,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (12.7)$$

【例】  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$  とする.

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 xy dy \right) dx && x \text{ を定数とみなして積分} \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{x^2}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^5 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{12} x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$



## 13 変数変換

1変数の積分を計算するとき変数変換を用いる置換積分法が使われました. 重積分においても同様の公式があります. 今  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  とし,  $\mathbf{h}(x, y) = \begin{pmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \end{pmatrix}$  を  $D$  から  $E$  への1対1変換<sup>iv</sup>とする. この時, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} u = h_1(x, y) \\ v = h_2(x, y) \end{cases} \iff \begin{cases} x = h_1^{-1}(u, v) = g_1(u, v) \\ y = h_2^{-1}(u, v) = g_2(u, v) \end{cases} \quad (13.1)$$

( $h_1^{-1}, h_2^{-1}$  を改めて  $g_1, g_2$  で書き直した)

また以下の行列式

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (13.2)$$

<sup>iv</sup>この詳しい説明は後です

をヤコビアンと言う。(しばしば記号  $J$  と略記する)

定理

この時,  $f(x, y)$  が  $D$  で連続ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g_1(u, v), g_2(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (13.3)$$

ここで  $|J(u, v)|$  はヤコビアン行列式の絶対値であることに注意すること.

【例】  $D = \{(x, y) | 1 \leq x + y \leq 2, 0 \leq x - y \leq 1\}$  とする. この時  $\iint_D \frac{x-y}{x+y} dx dy$  を計算せよ.

$$\begin{cases} u = x + y & \leftarrow h_1(x, y) \text{ に対応} \\ v = x - y & \leftarrow h_2(x, y) \text{ に対応} \end{cases} \quad (13.4)$$

と変数変換を行う. この時

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} & \leftarrow h_1^{-1}(u, v) = g_1(u, v) \text{ に対応} \\ y = \frac{u-v}{2} & \leftarrow h_2^{-1}(u, v) = g_2(u, v) \text{ に対応} \end{cases} \quad (13.5)$$

また  $(x, y)$  変数での定義域  $D$  は  $E = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}$  に変換される.

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}, \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$  よりヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad (13.6)$$

これより

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x-y}{x+y} dx dy &= \int_0^1 \int_1^2 \frac{v}{u} \underbrace{|J|}_{1/2} du dv \\ &= \int_0^1 \frac{v}{2} \left( \int_1^2 \frac{1}{u} du \right) dv \\ &= \int_0^1 \frac{v}{2} \log 2 dv \\ &= \frac{\log 2}{2} \left[ \frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\log 2}{4} \end{aligned}$$

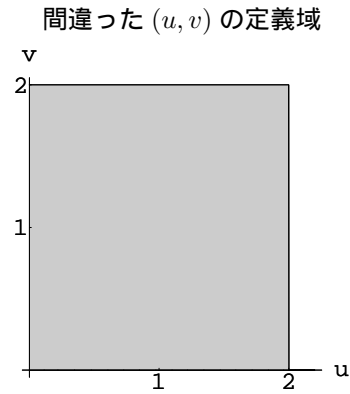
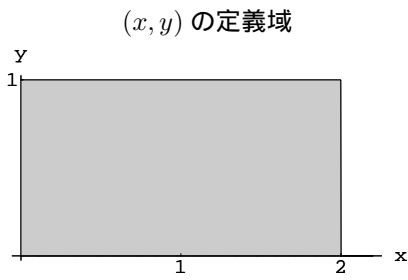
### 13.1 変数変換を行う上での注意点

【学生】 変換  $h(x, y)$  は 1 対 1 でなくてはならないとはどういうことですか?

【先生】 定積分  $\int_0^1 \int_0^2 x e^{xy} dx dy$  を  $u = x, v = xy$  と変数変換をして解いてみてください.

【学生】 定義域が  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$  で,  $u = x, v = xy$  ですから,  $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2$  ですから,  $(u, v)$  の定義域は  $E = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\}$  となります.

【先生】 それだと不正解ですね. といいますのは, 君の言った形に定義域が変換されると, 以下の図のようになります.



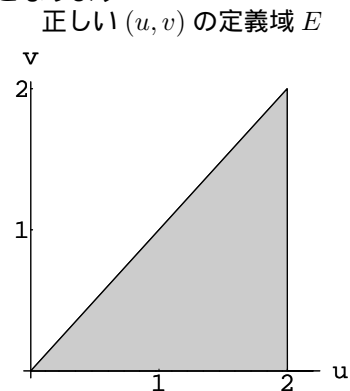
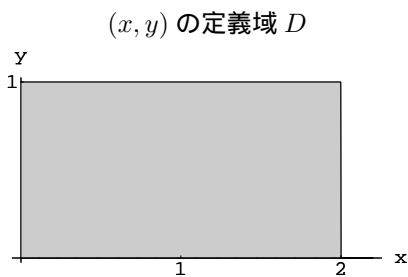
ところが  $x = u, y = \frac{v}{u}$  ですから  $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  の点は  $(x, y) = (\frac{1}{2}, 3)$  に対応しますので、この点は  $D$  に属していませんよね。だから 1 対 1 対応が守られていないことになります。

【学生】 ではどのように領域を変換すればよいのですか？

これは  $x = u, y = \frac{v}{u}$  ですから、

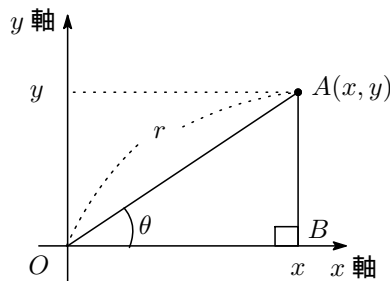
$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 &\iff 0 \leq u \leq 2, 0 \leq \frac{v}{u} \leq 1 \\ &\iff 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u \end{aligned}$$

となりますので、 $E = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u\}$  が正しい領域となります。



## 13.2 極座標を用いた変数変換

これまででは平面上の点は  $x$  座標と  $y$  座標を組にして  $(x, y)$  という表し方をしてきました。この表し方は直交座標と言います。しかし平面上の点は別の表し方があります。これは以下の図を見てみましょう。

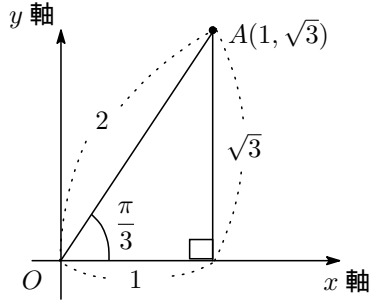


この時、 $x$  軸で  $x \geq 0$  の部分の半直線を基準としたときの点  $A$  の向き  $\angle AOB = \theta$  として、 $O$  から  $A$  までの距離を  $r > 0$  とします。ここで  $r$  と  $\theta$  を用いて点  $A$  を表すと、

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (13.7)$$

となります。この時、組  $(r, \theta)$  を  $A$  の極座標と言います。

【例】



直交座標では  $A(1, \sqrt{3})$  となり、極座標では  $A(2, \frac{\pi}{3})$  となる。

さて、 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$  を考えてみましょう。この時、変数変換を  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とすると、領域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  と  $E = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  は 1 対 1 に対応します。

またヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad (13.8)$$

となります。これより

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot \underbrace{r}_{J} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 d\theta = \frac{2}{3} \pi$$

となります。

問 13.1 ①  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ ,  $\iint_D x \left(1 + \frac{y}{x}\right)^5 dx dy$

② 13.1 章の重積分  $\int_0^1 \int_0^2 x e^{xy} dx dy$  を変数変換をして値を求めよ。

③  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$  を計算せよ。(ヒント:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  と変数変換する.)

### 13.3 重積分における無限積分

関数の積分範囲が有界でない時は、1 変数の場合と同様に無限積分を考える。今、領域  $D$  は  $D = [1, \infty) \times [0, 1]$  のように無限大を含む領域とする。この時、以下の概念を導入する。

近似増加列

$\{D_i\}, (i = 1, 2, \dots)$  が (1), (2) を満たすとき近似増加列であると言う:

(1) 有界閉集合で

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq \dots$$

(2)  $D$  に含まれる任意の有界閉集合  $A$  に対して  $A \subseteq D_N$  を満たす  $N$  が存在する。

【例】  $D = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$  とする。この時、 $D_n = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq n^2\}$  は近似増加列である。一方で  $\tilde{D}_n = \{(x, y) | -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$  も近似増加列である。<sup>v</sup>

近似増加列とは、要は  $D$  の内側からだんだん大きくなって行って、最後には  $D$  に近づく集合列というイメージ。

<sup>v</sup>つまり一般的に近似増加列は無数にある。



定義

$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$  が近似増加列  $\{D_n\}$  の選び方にかかわらず同じ極限を持つ時、 $f(x, y)$  は広義積分可能であると言い

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (13.9)$$

と表す。

しかしながら広義積分可能かどうかをチェックするのは大変なので、以下の便利な定理を用いる。

定理

$D$  のある一つの近似増加列  $\{D_n\}$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy$  が存在するとする。この時  $f(x, y)$  は広義積分可能であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (13.10)$$

となる。

証明: 略 (例えば入江 [5])

【例】  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy$  を求める。ここで  $\exp(\square) = e^\square$  を表す。例えば  $\exp(2) = e^2$ 。

最初に  $D_n = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq n^2\}$  と置き、 $\iint_{D_n} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)) dx dy$  を計算する。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおくと、 $(r, \theta)$  の積分範囲は  $E_n = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r \leq n\}$  となり、(13.8) と同じ計算によりヤコビアンは  $J = r$  となる。よって

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^n \exp\left(-\frac{r^2}{2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^n r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^n d\theta \\ &= 2\pi \left(1 - \exp\left(-\frac{n^2}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

となる。よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi(1 - e^{-n^2/2}) = 2\pi$  となる。 $e^{-(x^2+y^2)/2}$  は常に正の値をとるので、上の定理より  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = 2\pi$  となる。

**注意 1** 工学的には、以下のように  $\infty$  も 1 つの数のようにして扱うことが多い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 2\pi.$$

ただしこの場合、広義積分可能性が成り立たないときもあるので、注意深く計算する必要がある。

**問 13.2**  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^3} dx dy$  を求めよ。

## 14 n重積分

$n$  重積分も 2 重積分と同様の方法で定義する。 $f(x_1, \dots, x_n)$  は  $n$  次元の区間  $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  上で定義された有界な連続関数とする。ここで

$$a_i = x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{im_i-1} < x_{im_i} = b_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (14.1)$$

とし、各小区間

$$[x_{1i_1-1}, x_{1i_1}] \times \cdots \times [x_{ni_n-1}, x_{ni_n}] \quad (i_1 = 1, \dots, m_1, \dots, i_n = 1, \dots, m_n). \quad (14.2)$$

を  $D$  の分割とする。ここで小区間 (14.2) における任意の点  $\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$  をとり、次の和

$$S_{\Delta, \xi} = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})(x_{1i_1} - x_{1i_1-1}) \cdots (x_{ni_n} - x_{ni_n-1}) \quad (14.3)$$

を考えます。今、分割の幅で最大のものを

$$|\Delta| = \max_{i_1, \dots, i_n} (x_{1i_1} - x_{1i_1-1}, \dots, x_{ni_n} - x_{ni_n-1}) \quad (14.4)$$

とします。ここで

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_{\Delta, \xi} = I \quad (14.5)$$

が有限となる時、 $f(x_1, \dots, x_n)$  は  $D$  において  $n$  重積分可能であるといい、

$$I = \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (14.6)$$

と表す。特に定義域が  $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  の時、その累次積分は以下の形になる。

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \left( \cdots \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_n \quad (14.7)$$

**【例】**  $D = \{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ . この時

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 x_1 x_2 x_3 dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{1}{2} x_2 x_3 dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} x_3 dx_3 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

**問 14.1**  $D = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$  とするとき、 $\iiint_D dx dy dz$  を求めよ。

## 14.1 $n$ 次元定積分の変数変換

$n$  変数の定積分の変数変換も 2 変数の場合と同様にして行うことができます。  $I = \iint_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$

とし、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  とします。

この時、 $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$  を  $D$  から  $E$  への 1 対 1 変換とすると以下の関係が成り立ちます。

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = h_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n) = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n) = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (14.8)$$

この時, 以下の行列式

$$J(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n(\mathbf{y})}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (14.9)$$

をヤコビアンと言う. (記号  $J$  で略記する) この時, 以下の定理が成り立ちます.

定理

$f(x_1, \dots, x_n)$  が  $D$  で連続ならば

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_E f(g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})) |J(\mathbf{y})| dy_1 \cdots dy_n. \quad (14.10)$$

ここで  $|J(\mathbf{y})|$  はヤコビアン行列式の絶対値であることに注意すること.

## 14.2 ガンマ関数

$s > 0$  に対して

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \quad (14.11)$$

をガンマ関数と言う.

定理

- (i)  $\Gamma(1) = 1$
- (ii)  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- (iii)  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

証明:(i) は示せる. (ii) の証明:  $\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$  を用いて示す.  $f(x) = e^{-x^2}$  は偶関数 (つまり左右対称な形) より

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

ここで  $\frac{x^2}{2} = y$  とおくと,  $x = \sqrt{2y}^{1/2}$  より  $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} y^{-1/2} dy$  となる. よって

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= 2 \int_0^\infty e^{-y} \frac{1}{\sqrt{2}} y^{-1/2} dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 2 \int_0^\infty y^{1/2-1} e^{-y} dy \\ &= \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

よって示された.

(iii) の証明. 部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} x^s (-e^{-x})' dx \\ &= \left[ x^s (-e^{-x}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} s x^{s-1} (-e^{-x}) dx \\ &= s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \\ &= s \Gamma(s).\end{aligned}$$

## 15 テイラー (Taylor) 展開

$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は区間  $(a, b)$  において  $n$  回微分可能な関数とし,  $x_0$  を  $(a, b)$  に属する点とする. この時,  $(a, b)$  の任意の点  $x$  に対して

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x) \quad (15.1)$$

と表すことができる. ここで  $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)$ ,  $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ ,  $\xi$  は等式 (15.1) が成り立つような  $x$  と  $x_0$  を結ぶ線分上のある点である. (15.1) の右辺の式を点  $x_0$  の周りでのテイラー展開と言い,  $R_n(x)$  を  $n$  次のラグランジュの剰余項と言う. 式 (15.1) はシグマ記号を用いると  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$  となる.

また 3 次の剰余項を持つ展開式 ( $n=3$  の場合) はしばしば用いられ, それは

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-x_0)^3. \quad (15.2)$$

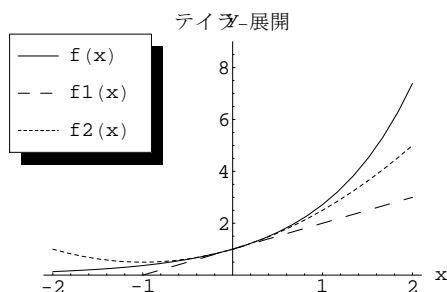
となる. テイラー展開は  $x_0$  の近傍 (近く) で  $f(x)$  を多項式で近似する手法です.

**注意** 点  $x=0$  の周りでテイラー展開をマクローリン展開と言う.

**【例】**  $f(x) = e^x$  のマクローリンは,  $f'(0) = e^0 = 1$ ,  $f''(0) = 1$ ,  $f^{(3)}(\xi) = e^\xi$  より

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{6}x^3 \quad (15.3)$$

となります. ここで第 2 項までの近似式を  $f_1(x) = 1 + x$ , 最後の剰余項は切り捨てたものを  $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$  とすると以下の図のようになります.



このグラフより  $f_2(x)$  の方が  $x=0$  の近くでは  $f(x)$  を正確に近似しているようです. ただし  $x=0$  から離れた点では近似の精度は落ちていきます.

**問 15.1** ①  $f(x) = \log(1+x)$  の  $x=0$  の周りでの 3 次の剰余項を持つテイラー展開を求めよ.

②  $f(x) = e^{\cos x}$  の  $x = \frac{\pi}{2}$  の周りでの 3 次の剰余項を持つテイラー展開を求めよ.

多変数の場合のテイラー展開も同様にして定義します.

$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  は  $n$  回連続微分可能な関数とする.  $S$  を  $\mathbb{R}^d$  の開集合とする.  $\mathbf{x}_0 \in S$  とする. この時,  $S$  の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^d \cdots \sum_{i_k=1}^d \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \prod_{j=1}^k (x_{i_j} - x_{0i_j}) + R_n(\mathbf{x}), \quad (15.4)$$

ここで

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^d \cdots \sum_{i_n=1}^d \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \prod_{j=1}^n (x_{i_j} - x_{0i_j}). \quad (15.5)$$

$\boldsymbol{\xi}$  は (15.4) が成り立つように定めた  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}_0$  を結ぶ線分上のある数である.

多変数のテイラー展開は複雑であるが、行列を用いると比較的簡単な表現ができる. 例えば  $n = 3$  の場合,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T D^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_n(\mathbf{x}) \quad (15.6)$$

となる. ここで  $T$  は転置行列を表す記号,  $Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_d} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ ,  $D^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_d} f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_d \partial x_1} f(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_d \partial x_d} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ ,

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k}). \quad (15.7)$$

## 16 確認テスト

[1] 以下の式を  $\Sigma$  記号を用いない形で表すこと.

- ①  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1$   
 ②  $\sum_{k=1}^n a_k^2$   
 ③  $\sum_{k=1}^4 k$

[2] 6 個の数字 0,1,2,3,4,5,6 がある. ① 異なる 3 つの数字を用いてできる 3 桁の整数はいくつあるか

② ①のうち偶数の数はいくつできるか

[3] 6 本のくじの中に 2 つの当たりくじが入っている. この時 a,b の順で引くとき, a が当たりくじを引き, b がはずれくじを引く場合は何通りあるか.

[4] 袋の中に白球 6 個, 赤球 4 個入った袋がある. その中から 3 個球を取り出す時, 白球 2 個, 赤球が 1 個である確率を求めよ.

## 17 解答

確認テスト [1] ①  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ , ②  $\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$  ③  $\sum_{k=1}^4 k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

[2] ① 百の位は 0 でないから 1 から 5 までの 5 個から 1 個とる. 十、一の位は他の 5 個から 2 個とる順列より  ${}_5P_2$ . よって  $5 \times {}_5P_2 = 5 \times 5 \times 4 = 100$ . ② 偶数は一の位が 0,2,4 の数: (1) 0 の場合: 百、十の位の数以外の 5 個から 2 個とる順列で  ${}_5P_2$  通り.

(2) 2,4 の場合:百の位は 0 を除く他の 4 通り, 十の位はさらに他の 4 通りから  $4 \times 4 \times 2$  通り. したがって (1),(2) より  ${}_5P_2 + 4 \times 4 \times 2 = 52$ .

[3] くじに番号をつける. 5,6 を当たりとする. この時, a が当たりくじを引く場合は 2 通り. a が当たりくじを引いた状態では, はずれくじが 4 本, 当たりくじが 1 本となる. ここで b がはずれくじを引く場合は 4 通りとなる. よって積の法則より  $4 \times 2 = 8$  通りとなる.

[4] まず 6 個の白球から 2 つ取り出す場合の数は  $\binom{6}{2}$  通りある. さらにそのおのおのに対して赤球を 1 個取る場合の数は  $\binom{4}{1}$  ある. よって白球を 2 個, 赤球を 1 個とる場合の数は

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times 4 = 60.$$

一方で 10 個の球のなかから 3 個球を取り出す場合の数は

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

ある. よって求める確率は  $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ .

問 1.2 17

問 8.2 ① 3 ② 0

問 9.1  $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = -4, \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = -3, \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = -2$ .

問 9.2  $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -4x + y, \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2y + x$ .

問 10.1 ①  $\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + C$ . ②  $\log x = t$  とおくと,  $\frac{1}{x}dx = dt$ . よって  $\int \frac{1+(\log x)^2}{x}dx = \int (1+t^2)dt = t + \frac{1}{3}t^3 + C = \log x + \frac{1}{3}(\log x)^3 + C$ .

③  $e^x = t$  とおくと  $e^x dx = dt$ . よって  $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+t}dt = \log|1+t| + C = \log(1+e^x) + C$ .

④  $3x-1 = t$  と置くと  $dx = \frac{1}{3}dt$ . よって  $\int x(3x-1)^n dx = \int \frac{t+1}{3}t^n \frac{1}{3}dt = \frac{1}{9(n+2)}(3x-1)^{n+2} + \frac{1}{9(n+1)}(3x-1)^{n+1}$ .

問 11.1 ①  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \left[ \frac{-2}{x^2} \right]_1^\infty = 2$ .

②  $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2/2}dx = \left[ -e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^\infty = 0$

③ 任意の  $c$  に対して  $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx = \int_c^\infty x^3 dx + \int_{-\infty}^c x^3 dx$ . 右辺のどちらの項も発散する. よって  $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$  は積分可能でない.

問 12.1 ①  $\int_1^2 \int_0^2 (1-x-y)dxdy = \int_1^2 [x - \frac{1}{2}x^2 - xy]_0^2 dy = \int_1^2 (-2y)dy = -3$ .

②  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\pi/2} [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} dy = \int_0^{\pi/2} (-\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos y)dy = 2$ .

問 13.1 ①  $\frac{49}{2}$ . ②  $e^2 - 3$ . ③  $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2}rdrd\theta = \pi \log 2$ . ( $\int \frac{r}{1+r^2}dr = \frac{1}{2} \log(1+r^2)$  を用いる.)

問 13.2  $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^3}dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^3}drd\theta = \frac{\pi}{2}$ .

問 14.1  $\frac{1}{6}$

問 15.1 ①  $f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ . よって  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(1+x)^3}x^3$ .

$$\textcircled{2} f'(x) = -\sin x e^{\cos x}, f''(x) = (\sin^2 x - \cos x) e^{\cos x}. \text{ よって } f(x) = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(\sin^2 \xi - \cos \xi) e^{\cos \xi}}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

## 索引

ガンマ関数, 27

極座標, 24

広義積分, 25

高次の無限小, 10

指数関数, 7

重積分, 18, 25

$\Sigma$  記号, 1

対数, 8

置換積分, 14

定積分, 15

テイラー展開, 28

2項定理, 5

2重総和記号, 2

ネピアーの数, 7

不定積分, 13

重積分の変数変換, 21

偏導関数, 12

偏微分, 11

マクローリン展開, 28

無限積分, 17

ヤコビアン, 22

有界, 15

累次積分, 20

ロピタルの定理, 10



$\Sigma$  や順列，組み合わせに関してより丁寧に、もしくはより深く知りたいという方は以下の図書を参考にして下さい。

## 参考文献

- [1] 矢野健太郎, 石原繁 編, 基礎の数学, 裳華房. これは数学の入門書. 高田記念図書館もしくは政経学読 書庫 2F で借りることができる .
- [2] 矢野健太郎, 石原繁 編, 微分積分, 裳華房.
- [3] ”数学 B”, 数研出版 これは高校の教科書ですが本屋で頼めば購入できます.
- [4] <http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/5427/mathtrtop.html> 順列，組み合わせ，および確率の基礎が学べます .
- [5] 入江, 垣田, 杉山, 宮寺 (1992) 微分積分 (下), 内田老鶴圃
- [6] 鈴木 武, 山田 義雄, 柴田 良弘, 田中 和永 (2007) 微分積分 I, 内田老鶴圃
- [7] 黒田 成俊 (2002) 微分積分, 共立出版