1　行列 (Matrix)

以下のように数や文字を並べた配列を考えてみます.
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
このように数や文字を並べて丸括弧で囲んだものを**行列**と言います. 括弧の中のそれぞれの数のことを**成分** もしくは**要素**と言い, 行列におけるの横の並びを**行**, 縦の並びを**列**と言います.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1\text{列目} & 2\text{列目} & 3\text{列目} \\ \hline 1\text{行目} & 5 & 6 & 7 \\ 2\text{行目} & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

行の数が m 個あり, 列の数が n 個ある行列を $m \times n$ 行列と言い, 特に行の数と列の数が同じ行列を**正方行列**と言います.

【例 1.1】 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 2×1 行列. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は 2×2 の正方行列.

行列は A, B のように**大文字**, もしくは $\mathbf{a}$ のような太文字を用いて表し, その成分は a_{12} のように小文字を使って表わします. また第 i 行と第 j 列が交差する要素のことを (i, j) **成分**と言います.

【例 1.2】 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ における $(2, 1)$ 成分は 0.

$\boxed{\text{問 1.1}}$ 例 1.2 の行列 A の (1,3) 成分を求めよ.

行列 A, B が同じ型を持ち, かつそれぞれの成分が等しいとき, A と B は**等しい**といい $A = B$ と書く.

【例 1.3】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする. このとき $A \neq B$, $A \neq C$(行列の型が違う), $A = D$ である.

1.1　行列の和, 差

同じ型を持つ行列 A, B のそれぞれの成分を足し合わせたものを, A と B の**和**と言い, $A + B$ と表す. 例えば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \tag{1}$$

また同様にして $A - B$ も定義する. 例えば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix} \tag{2}$$

また $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のように, 成分のすべてが 0 である行列を**零行列**といい, $\mathbf{O}$ を用いて表す.

【例 1.4】

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 & 6+2 \\ 2+3 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2　行列の実数倍

実数 k に対して, 行列 A の各成分を k 倍した成分を持つ行列を kA と書く. 例えば

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \tag{3}$$

【例 1.5】

$$5\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-3) & 5\cdot 6\\ 5\cdot 2 & 5\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 30\\ 10 & 25\end{pmatrix}$$

問 1.2 $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 7\end{pmatrix}$ とする．この時, 以下を計算せよ.

① $A+B$　② $A-B$　③ $A-2B$

1.3　行列の積

次の 2 つの行列 A, B を考える．

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{pmatrix}.$$

このとき A と B の積 (かけ算)AB は以下のように定義します.

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1+a_2b_2 & a_1d_1+a_2d_2\\ c_1b_1+c_2b_2 & c_1d_1+c_2d_2\end{pmatrix}$$

上の定義において例えば, AB の (2,1) 成分であれば, 左の行列 A の 2 行目と右の行列 B の 1 列目を上のように掛け合わせていることに注意してください

【例 1.6】 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ とする.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 5\\ 3\cdot(-2)+4\cdot 1 & 3\cdot 0+4\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -2 & 20\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 16 & 22\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 6\\ 3\cdot 5+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\ 39\end{pmatrix}\quad \text{よって } 3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51\\ 117\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}3\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\ 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 15+2\cdot 18\\ 3\cdot 15+4\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51\\ 117\end{pmatrix}$$

行列の乗算における性質

- 行列の乗算において一般的には $AB\neq BA$ であることに注意 (上の例 1.6 を見よ).
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(AB)C=A(BC)$
- 実数 k に対して $kAB=A(kB)$.(例 1.6 参照)

つまり行列の乗算は順番を交換できないこと以外は、普通の文字式 (例えば $x(y+z)=xy+xz$, $3xy=x(3y)$) と同じような感覚で計算してよいということを意味している.

これより例えば行列 A, B に対して

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

と計算できる.

3×3 行列同士の乗算についても同様に定義します.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{pmatrix}$$

$\boxed{問 1.3}$ 次を計算せよ.

① $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.4 単位行列

左上から右下に向かった成分は全て 1 で, それ以外は 0 である行列を**単位行列**と言い, E で表す. ここで E は 2×2 の単位行列であれば

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

3×3 の単位行列であれば

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる. 任意の正方行列 A に対して, 同じ型の単位行列を E とすると $AE = EA = A$ が成り立つ. つまり単位行列は, 普通の数でいうところの 1 に相当する. ($5 \times 1 = 5$ のように 1 をかけても値は変わらない)

$\boxed{問 1.4}$ $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする. この時, 以下を計算せよ.

① AE ② EW

2 逆行列

E を単位行列とする. 正方行列 A に対して

$$AX = E \quad \text{かつ} \quad XA = E$$

を満たす行列 X があるとき, この X を A の**逆行列**と言い, A^{-1} と表す. 即ち $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ が成り立つ.

2×2 行列の逆行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

① A が逆行列 A^{-1} を持つ $\Longleftrightarrow ad - bc \neq 0$

② $ad - bc \neq 0 \Longrightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6}$$

証明 (まっとうなやり方): $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とする. ここで $AX = E$ となるように, x, y, z, w を求める.

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

より

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \quad \cdots (*1) \end{cases} \qquad \begin{cases} ay + bw = 0 \quad \cdots (*2) \\ cy + dw = 1 \end{cases} \tag{8}$$

ここで (8) の左側の連立方程式において, 上の式の両辺に c, 下の式の両辺に a をかけると

$$\begin{cases} acx + cbz = c \\ acx + adz = 0 \end{cases} \tag{9}$$

となるので, $(ad-bc)z=-c$. よって $z=\dfrac{-c}{ad-bc}$. これを $(*1)$ に代入すると $cx+\dfrac{-cd}{ad-bc}=0$ となるので $x=\dfrac{d}{ad-bc}$ となる. 次に, (8) の右側 $\begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$ を考える. ここで

$$\begin{cases} acy+bcw=0 \\ acy+adw=a \end{cases} \tag{10}$$

となるので $(ad-bc)w=a$. よって $w=\dfrac{a}{ad-bc}$. これを $(*2)$ に代入すると $ay+\dfrac{ab}{ad-bc}=0$ となるので $y=\dfrac{-b}{ad-bc}$ を得る. これより

$$X=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{11}$$

となる. これを用いて XA を計算すると $XA=E$ となるので, X は逆行列となる. □

問 1.5 以下の行列 A は逆行列を持つかどうか述べよ. また逆行列を持つ場合, それを求めよ.
① $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ② $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

3 行列の n 乗

ここでは, 行列 A の n 乗の形を求める問題を考える.

問題

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ において A^n を求めよ.

解答 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$ から類推して $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

これを数学的帰納法で示す.

$n=1$ の時 $A^1=\begin{pmatrix} a^1 & 1\cdot a^{1-1}b \\ 0 & a^1 \end{pmatrix}=A$ より成り立つ.

$n=k$ の時, 成り立つと仮定する. 即ち

$$A^k=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}.$$

このとき, 上の式の両辺に行列 A をかけると

$$A^{k+1}=AA^k=A^k=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}.$$

これより題意は示せた. □

注意 厳密に言えば A^n は A, A^2, A^3 などから類推するだけでなく, 数学的帰納法で示す必要がある.

3.1 数学的帰納法とは?

上の計算例からも分かるように数学的帰納法とは, 以下の方法により題意 (上の例では $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$) を示す方法です.

数学的帰納法

① $n = 1$ の場合, 題意が成り立つことを確かめる.
② $n = k$ の時に, 題意が成り立つと**仮定**[a]する.
③ ①, ②が成り立つという前提の下で, $n = k + 1$ の時に, 題意が成り立つことを示す.

[a]本当に題意が成り立つかどうかは考えない. とにかく成り立つと仮定してしまう

結局, 上の ③が示せるということは, "$n = k$ の時点で成り立つものは, その次の時点 ($n = k + 1$) でも成り立つ" ということになります. ということは,

$$
\begin{aligned}
n = 1 \text{ の時に成り立つ} \quad &\Longrightarrow \quad n = 2 \text{ の時に成り立つ} \\
&\Longrightarrow \quad n = 3 \text{ の時に成り立つ} \\
&\Longrightarrow \quad \cdots\cdots\cdots \\
&\Longrightarrow \quad \text{全ての } n \text{ について成り立つ}
\end{aligned}
$$

となります.

4 掃き出し法

次の連立方程式を考える.

$$
\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ x - 4y = -5 \end{cases}
$$

これを次のような形で表すことにする.

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 18 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \tag{12}
$$

この式を以下の 基本操作 にしたがって,

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 18 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \diamondsuit \\ 0 & 1 & \heartsuit \end{array}\right) \tag{13}
$$

という形に変形させるのが**目的**である. この時, $x = \diamondsuit$, $y = \heartsuit$ がこの連立方程式の解となる. ここで基本変形とは次の 3 つの操作をいう.

基本変形

1. ある行を k 倍する.
2. ある行の k 倍を他の行に加える.
3. 行と行の交換をする.

まず, 具体的な使い方を説明する. $\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$ を掃き出し法で解くことを考えよう.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 18 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \quad \text{ここで 1 行目を 2 で割ると}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \quad \text{2 行目から 1 行目を引いて}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \quad \text{2 行目を} -7 \text{で割って}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{1 行目から 2 行目に 3 をかけたものを引くと}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

これより $x = 3$, $y = 2$ となることが分かった.

5 なぜこのようなことができるのか

連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$$

は行列を用いると

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \end{pmatrix}$$

と表される．ここで，3 章で行った基本変形と同様の変形をさせる行列が存在する．例えば 2×2 行列において

1. ある行を k 倍する:1 行目を k 倍させるには $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，2 行目を k 倍させるには $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ を左からかければよい.
2. ある行の k 倍を他の行に加える:1 行目に 2 行目を k 倍したものを加えるには $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかければよい.
3. 行と行の交換をする:これは $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を左からかければよい.

今，3 章の掃き出し法の具体例で行った”1 行目を 2 で割るという”操作は，上の行列で表された式の左側から，行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を乗ずればよい．即ち，

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \end{pmatrix}$$

これを計算すると，掃き出し法の 2 番目の式に対応する式になる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

その後の変形も基本変形の行列を用いて変形できる.

つまり，$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \end{pmatrix}$ と置きなおすと，行列で

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

と表すことができる．これより基本変形させる行列 $\mathbf{C}_1$ を左からかけると

$$\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{b}$$

となる．この基本操作を行う行列を何回 (ここでは m 回基本変形) 行うと

$$\mathbf{C}_m \cdots \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{C}_m \cdots \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{b}$$

となる．このとき

$$\mathbf{C}_m \cdots \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となっていれば，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ より，解 $\mathbf{u} = \mathbf{C}_m \cdots \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{b}$ が得られる仕組みになっている．

$\boxed{\text{問 5.1}}$:次の連立方程式を掃き出し法を用いて答えよ．

① $\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 21x - 10y = 19 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$

6 掃き出し法の逆行列への応用

4 章の考え方を用いると，逆行列を求める手法にも適用できることがわかる．まず最初に，逆行列を掃き出し法で求める方法を説明し，次の章で掃き出し法でなぜ逆行列を求めることができるかを示す． 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める方法を説明する． 今，これを次のような形で表す．

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{14}$$

この式を以下の基本操作を何回か繰り返して，

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \diamondsuit & \spadesuit \\ 0 & 1 & \heartsuit & \clubsuit \end{array}\right) \tag{15}$$

という形に変形させるのが目的である．この時，$\begin{pmatrix} \diamondsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \clubsuit \end{pmatrix}$ が $\mathbf{A}$ の逆行列となる．ここで基本変形とは，連立方程式の時と同様に次の 3 つの操作のことをいう．

基本変形

1. ある行を k 倍する.
2. ある行の k 倍を他の行に加える.
3. 行と行の交換をする.

まず，具体的な使い方を説明する．$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみよう．

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{2 行目から 1 行目に 2 をかけたものを引くと} \\
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{2 行目を} -1 \text{倍する} \\
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \text{1 行目から 2 行目に 3 をかけたものを引くと} \\
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

これより $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ となることが分かった.

7　なぜ掃き出し法で逆行列が求まるのか

基本的には 4 章と同じ考え方で求められる．まず基本変形と同様の変形させる行列が存在する．例えば 2×2 行列において

1. ある行を k 倍する:1 行目を k 倍させるには $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，2 行目を k 倍させるには $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ を左からかければよい.
2. ある行の k 倍を他の行に加える:1 行目に 2 行目を k 倍したものを加えるには $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかければよい.
3. 行と行の交換をする:これは $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を左からかければよい.

となる．ここで $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を $\mathbf{A}^{-1}$ と置くと，

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

が成り立つ．ここで $\mathbf{E}$ は単位行列．5 章の掃き出し法の具体例で行った"2 行目から 1 行目に 2 をかけたものを引く"という操作は，上の行列で表された式の左側から，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を乗ずればよい．即ち

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを計算すると，掃き出し法の 2 番目の式に対応する式になる．(式 (5) に対応)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

その後の変形も基本変形の行列を左からかけることにより変形していけばよい．つまり，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と置きなおすと，行列で

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$$

と表すことができる．これより基本変形させる行列 $\mathbf{C}_1$ を左からかけると

$$\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}_1\mathbf{E}$$

となる．この基本操作を行う行列を何回 (ここでは m 回基本変形) 行うと

$$\mathbf{C}_m\cdots\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}_m\cdots\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{E}$$

となる．このとき

$$\mathbf{C}_m\cdots\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となっていれば，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}$ となることより，逆行列 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}_m\cdots\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{E}$ が得られる仕組みになっている．

$\boxed{\text{問 6.1}}$:次の行列の逆行列を求めよ．① $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$

8　掃き出し法で解が一つ定まらない場合

次の連立方程式を掃き出し法で解いてみましょう．

$$\begin{cases}x+3y+z=3\\ 2x+y-3z=1\\ x+y-z=1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\quad 2\text{ 行目}-2\times 1\text{ 行目}\quad 3\text{ 行目}-1\text{ 行目}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & -5 & -5 & -5\\ 0 & -2 & -2 & -2\end{array}\right)\quad 2\text{ 行目}\times -\frac{1}{5},\quad 3\text{ 行目}\times -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\quad 3\text{ 行目から }1\text{ 行目を引く}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\quad 1\text{ 行目から }3\text{ 行目を引くと}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

これは 3 行目の成分が全て 0 になってしまっているので, 掃き出し法が通常の方法では解けません. このときは一度連立方程式の形に戻します.

$$\begin{cases} x+2y+0z=2 \\ 0x+y+z=1 \\ 0x+0y+0z=1 \end{cases}$$

そうするとこれは

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

となることが分かります. これは変数が 3 つあるのに式が 2 つしかないので、解が一つ定まらないのがわかると思います. これより $y=\dfrac{2-x}{2}, \quad y=1-z$ という形に直すと

$$\frac{2-x}{2}=1-z=y$$

となります. これより y が k という値を取ったときには $\dfrac{2-x}{2}=k$, $1-z=k$ となるので, これを整理すると

$$x=2-2k, \quad y=k, \quad z=1-k$$

という形で解が得られます.

9 解答

$\boxed{\text{問 1.1}}$ (1,3) 成分は 7. $\boxed{\text{問 1.2}}$ ① $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$. ② $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. ③ $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{問 1.3}}$ ① $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$. ② $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=3\sqrt{2}-1$. 1×1 行列の場合は括弧をつけない.

$\boxed{\text{問 1.4}}$ ① $AE=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. ② $EW=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{問 1.5}}$ ① $A^{-1}=\dfrac{1}{(-1)3-2(-2)}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. ② 逆行列は存在しない

$\boxed{\text{問 5.1}}$ ① $x=2/3$, $y=-1/2$ ② $x=-1$, $y=2$ ③ $x=1$, $y=-1$, $z=2$. $\boxed{\text{問 6.1}}$ ① $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁, (2003) 線形代数, 裳華房

10　行列式　(Determination)

今, 配列 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ を考えます. これは**行列式**と呼ばれるもので, 以下のように計算します.

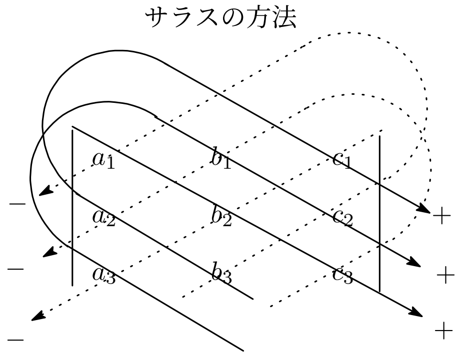
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{17}$$

これは行が 2 つで列が 2 つの行列式なので **2 次の行列式**と言います. ここで括弧が丸ではなく, | となっています. これは上の計算方法からも分かるように**行列**と**行列式**はまったく違うものなので注意してください. さて話がそれましたが, 3 次の行列式は以下のように定義します.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \tag{18}$$

これは覚えずらいですが、**サラスの方法**と呼ばれる方法を用いると比較的楽に覚えることができます.

サラスの方法



実線の矢印のものは全て足して, 点線の矢印のものは全てにマイナスをかける.

【例 10.1】 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 4 - 1\cdot 3 = -11.$

$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot 1\cdot(-3) + 4\cdot(-2)\cdot(-5) + 0\cdot 2\cdot 0 - (-5)\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot 0\cdot 6 - (-3)\cdot 2\cdot(-2) = 10$

$\boxed{\text{問 10.1}}$ 以下の行列式を計算せよ.

① $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$　② $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 12 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$　③ $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　④ $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$　⑤ $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

⑥ $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$　⑦ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

10.1　行列式の性質

ここでは, 3 次の行列式について述べるが, 2 次や 4 次など任意の n 次の行列式について成り立つ.

定理 10.1

行列式において行と列を入れ換えても, その値は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

これより行列式に関する定理で行について成り立つものは列について成り立つ.

定理 10.2

1 つの行 (または列) の全ての成分を k 倍して得られる行列式は, 元の行列式を k 倍したものと等しい.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 10.3

1 つの行 (または列) の成分が全て 0 の行列式は 0 となる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

定理 10.4

1 つの行 (または列) の成分が $(a+a', b+b', c+c')$ になっている行列式については, 以下のような計算ができる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a+a' & b+b' & c+c' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a' & b' & c' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 10.5

行列式において, 行と行 (または列と列) を入れ換えると, 行列式の符号が逆になる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

定理 10.6

行列式において, 同じ行 (または列) が 2 つあるとき, 行列式の値は 0 となる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

問 10.2 定理 10.5 を用いて定理 10.6 を証明せよ.

定理 10.7

行列式のある行を k 倍したものを他の行に加えても行列式の値は変わらない. またこれは列についても成り立つ.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & c_2 + kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

10.2　行列式の展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

行列式の計算の為によく使われるのは, 以下の形である.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{19}$$

【例 10.2】 以下の行列式を因数分解する.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \tag{20}$$

2 行目から 1 行目を引く. 3 行目から 1 行目から引くと

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

問 10.3　① $\begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{vmatrix}$ を求めよ. ② $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ を示せ.

10.3　高次の行列式

4 次の行列式を考えます.

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{21}$$

このとき, 4 次の行列式は以下のように計算します.

$$A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \tag{22}$$

- 4 次の行列式においても定理 10.1 から定理 10.7 が成り立つ.
- 一般の行列式の定義については後で説明する.

【例 10.3】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{23}$$

を計算する. 2 行目から 1 行目を 2 倍したものを引く, 3 行目から 1 行目を 3 倍したものを引く, 4 行目から 1 行目を 4 倍したものを引くと

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$ 2 行目から 1 行目を -2 倍したものを引く, 3 行目から 1 行目を 7 倍したものを引く

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -36 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -36 \end{vmatrix} = -(-144-16) = 160$$

$\boxed{\text{問 10.4}}$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ を示すこと.

10.4　行列を用いた行列式の表し方

正方行列 $A = (a_{ij})$ の成分の配列と同じ配列を持つ行列式を**行列 A の行列式**と言い, 記号で

$$|A| \text{ または } det(A)$$

と表す.

【例 10.4】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とすると $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ と計算します.

定理

A, B を正方行列とする. この時, $|AB| = |A||B|$ が成り立つ.

証明は省略するが, 具体的な例をあげる. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ とする. ここで $AB = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}$ より $|AB| = 20$ となる. 一方で $|A| = -2$, $|B| = -10$ より $|A||B| = (-2)(-10) = 20$ となり, $|AB|$ と等しくなることがわかる.

さらに A, B, C を正方行列とすると, $|ABC| = |A||B||C|$ も同様に成り立つ.

11　行列式解答

$\boxed{\text{問 10.2}}$ 2 行目と 3 行目を入れ換えると定理 10.5 より $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$. よって $2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$. これより定理は示せた. $\boxed{\text{問 10.3}}$ $(1-\rho^2)^2$.

12　演習問題

① $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

② $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & x & x \\ b & b & x & x \\ c & c & c & x \end{vmatrix} = 0$ を満たす x を求めよ.

③ $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, E を単位行列とする. この時, $|A - xE| = 0$ を満たす x を求めよ.

④ 3×3 の正方行列 A において $|{}^t A| = |A|$ を示せ.

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1/5 & 2/5 & 1 \\ 3/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix}$, ② $x = a, b, c$, ③ $x = 6, 2$

13　行列の階数 (Rank)

13.1　1 次独立

ベクトル $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N$ が

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_N\mathbf{a}_N = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0 \tag{24}$$

を満たすとき, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N$ は **1 次独立**であると言う. また **1 次独立**でない時, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N$ は**従属**であると言う.

【例 13.1】 2 つのベクトルを $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} &\Longrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0 \end{aligned}$$

よって $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は独立である.

問 13.1　$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるか?

13.2　ランク (Rank)

$n \times p$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ をベクトルを用いると $A = \begin{pmatrix} (a_{11} & \cdots & a_{1p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} & \cdots & a_{np}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix}$ と表せる.

この時, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ の中で 1 次独立な行ベクトルの**最大個数**を A の**ランク**と言い, $rank(A)$ と表す.

【例 13.2】　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. $\mathbf{a}_1^T = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2^T = (2, 4)$ となる. この時, $2\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ より, $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ は従属. よって $rank(A) = 1$ となる.

【例 13.3】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. $\mathbf{a}_1^T = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2^T = (3, 4)$, $\mathbf{a}_3^T = (5, 6)$ となる. この時,

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 + 6c_3 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{aligned}$$

よって $c_1 = 0$, $c_2 = -2c_3$ であるものあれば, (25) を満たす. これより, $\mathbf{a}_1^T = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2^T = (3, 4)$, $\mathbf{a}_3^T = (5, 6)$ は従属である.

この場合, 一つベクトルを減らして $\mathbf{a}_1^T = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2^T = (3, 4)$ で考えると**【例 13.1】**より独立であることがわかる. よって $rank(A) = 2$.

ランクにおいては以下の性質が知られている.

rank に関する性質

① $rank(A^T) = rank(A)$
② p 次の正方行列 A に対して, $rank(A) = p \Longleftrightarrow A$ は逆行列を持つ
③ B, C は正則行列の時, $rank(BA) = rank(AC) = rank(A)$

①は 1 次独立な**列**ベクトルの**最大個数**を A の**ランク**としても良いということを言っている. また証明は省略するが, 興味のある方は永田 [1] を参考にすること.

【例 13.4】 **【例 13.3】**の $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ では, その列ベクトルは $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ となる. この時

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 = 0 \\ 5c_1 + 6c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

これより $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ となるので, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ は独立より, $rank(A) = 2$ となる.

問 13.2 以下の行列のランクを求めよ. ① $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

13.3 階段行列

これまで紹介した方法で一般の行列のランクを求めるには、時間がかかる. 次章でランクを求めるための統一した方法を説明する. その準備として, まず階段行列というのを紹介する. 以下の条件を満たす行列を**階段行列**と言う.

階段行列の定義

① 0 以外の成分がある行で一番左の成分は 1 である.
② k 行目の一番左側にある 1 は, $k-1$ 行目の一番左側にある 1 はよりも右にある.
③ すべての成分が 0 である行は, まとめて下の行におく

これは具体的な, 行列を見た方がイメージがわき易い.

【例 13.5】 階段行列の例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

階段行列**でない**例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13.4 一般的な行列の rank の求め方

【例 13.6】 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のランクを掃き出し法[1]で求める. 掃き出し法は以下の 3 つの変形が許されている.

[1]逆行列を求めるために用いた

基本変形

1. ある行を k 倍する.
2. ある行の k 倍を他の行に加える.
3. 行と行の交換をする.

この時, 基本変形を繰り返し行い, 階段行列の形にする.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad 2\text{行目} - 2\times 1\text{行目} \quad 3\text{行目} - 1\text{行目}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix} \quad 2\text{行目} \times -\frac{1}{5}, \quad 3\text{行目} \times -\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad 3\text{行目から}1\text{行目を引く}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad 1\text{行目から}3\text{行目を引くと}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

この時, 以下のことが知られている.

$rank(A) = A$ の階段行列において, 全てが 0 でない行の数

よってこの場合, $rank(A) = 2$ となる.

【学生】 なぜ掃き出し法で, ランクが求めることができるのか

【先生】 ここでは省略しますが, 永田 (2008, p118-120) に書いてあります.

問 13.3 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ のランクを求めよ.

13.5 ランクに関する解答

問 13.1

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}c_1 + c_2 = 0\\ c_1 = 0\end{cases} \Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

よって独立である. 問 13.2 ① $rank(E) = 3$, ② $rank(A) = 2$. 問 13.3 $rank(A) = 2$

参考文献

[1] 永田靖 (2008)　統計学のために数学入門 30 講　朝倉書店

[2] Malcolm Pemberton, and Nicholas Rau, (2001). Mathematics for economists: an introductory textbook p221 (ランクの求め方)