

数理統計学 B 略語, 演習問題

2009/11/24 改訂

学部 組 番 氏名 _____

1 略語

iid: independently identically distributed (独立で同一分布に従う)

pdf: probability density function (確率密度関数)

LSE: Least Squares Estimator (最小二乗推定量)

i.e., id est (即ち)

∴ ゆえに

∵ なぜなら

$$\sum_{i=1}^N \equiv \sum_i$$

2 演習問題

[1] $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N$ に対して, $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$,

$$\overline{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i, \overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \text{ とする.}$$

① x と y の標本共分散を $s_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ とする. この時, 以下の式を示すこと

$$s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (1)$$

② x の標本分散を $s_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ とする. この時, 以下の式を示すこと

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \quad (2)$$

[2] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とする. この

時, 以下の式を計算せよ

① AB

② BA

[3] $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とする. この時, 以下の式を計算せよ.

① $\mathbf{a}'\mathbf{a}$

② $\mathbf{a}\mathbf{a}'$

[4] $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする. この時, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \end{pmatrix}$

を数値を用いて表すこと.

[5] $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とする.

① $f(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\beta}$ を行列を用いない形で表すこと.

② $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{\beta}) = (A + A')\boldsymbol{\beta}$ を示すこと

[6] $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{I}$ を単位行列,

$$M = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \text{ とおく.}$$

① $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ は対称行列であることを示せ

② M は対称行列であることを示すこと.

③ $M^2 = M$ を示すこと.

注意 $\mathbf{X}$ は成分表示したが, なるべく成分を用いないで, 示してください.

[7] 確率ベクトル $\mathbf{X}$, 行列 A に対して $V(A\mathbf{X}) = AV(\mathbf{X})A'$ を示すこと. ただし行列 A, B に対して $E(A\mathbf{X}B) = AE(\mathbf{X})B$ の結果を用いてよい.

[8] 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ の同時確率密度関数を行列を用いて表すこと.

[9] 確率変数 X は自由度 r のカイ二乗分布 $\chi^2(r)$ に従う. この時,

① $E(X) = r$ を示すこと

② $V(X) = 2r$ を示すこと

[10] A は 2×2 正方行列, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ とする. この時, ③

全ての β において

$$A\beta = \mathbf{0} \quad (3)$$

の時, $A = \mathbf{O}$ であることを示せ.

3 行列を用いた期待値に関する演算

確率ベクトル $\mathbf{X}$, 行列 A, B , 定数ベクトル $\mathbf{b}$ とする.

- $E(A\mathbf{X} + \mathbf{b}) = AE(\mathbf{X}) + \mathbf{b}$
- $E(A\mathbf{X}B) = AE(\mathbf{X})B$
- $V(A\mathbf{X}) = AV(\mathbf{X})A'$
- (Fact23.2, p238) 特に $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ のとき, $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$ とおくと, $\mathbf{Y} \sim N(A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, A\Sigma A')$

4 解答

[6] ① $(\mathbf{X}'\mathbf{X})' = \mathbf{X}'(\mathbf{X}')' = \mathbf{X}'\mathbf{X}$. よって $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ は対称行列.

② まず $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ が対称行列であることを示す.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{I} \quad \text{①より}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})' = \mathbf{I} \quad \text{両辺を転置すると}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]' = \mathbf{I} \quad \text{左から } (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ をかける}$$

$$[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

これより

$$\begin{aligned} M' &= (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')' \\ &= \mathbf{I} - (\mathbf{X}')'[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]'\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= M \end{aligned}$$

よって示せた.

$$\begin{aligned} M^2 &= (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') \\ &= \mathbf{I}^2 - 2\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &\quad + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{I} - 2\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = M \end{aligned}$$

[7]

$$\begin{aligned} V(A\mathbf{X}) &= E[(A\mathbf{X} - E[A\mathbf{X}])(A\mathbf{X} - E[A\mathbf{X}])'] \\ &= E[A(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])'A'] \\ &= AE[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])'A'] \\ &= AV(\mathbf{X})A' \end{aligned}$$

$$[8] \mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\right).$$

[9] 自由度 r のカイ二乗分布の pdf は

$$f(x) = \frac{1}{2\Gamma(r/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{(r/2)-1} e^{-(x/2)}, \quad (x > 0)$$

となる. これより

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x \frac{1}{2\Gamma(r/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{(r/2)-1} e^{-(x/2)} dx \\ &= \frac{1}{2\Gamma(r/2)} \int_0^\infty x \left(\frac{x}{2}\right)^{(r/2)-1} e^{-(x/2)} dx \end{aligned}$$

$\frac{x}{2} = y$ とおくと

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\Gamma(r/2)} \int_0^\infty y^{(r/2)} e^{-y} dy \\ &= \frac{2\Gamma((r/2) + 1)}{\Gamma(r/2)} \\ &= 2 \times (r/2) = r \end{aligned}$$