数理統計学 B 宿題 1

火曜 2 時限　担当　宮田

1　線形回帰モデル

線形回帰モデル

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{1}$$

を考える．ここで $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ は撹乱項を表す確率ベクトルで $E[\boldsymbol{\epsilon}] = \mathbf{0}$, $V[\boldsymbol{\epsilon}] = \sigma^2 \mathbf{I}_N$, $\mathbf{I}_N$ は $N \times N$ の単位行列とする．

[1] $\boldsymbol{\beta}$ の最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$ は $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ となることが分かっている．この時

$$\hat{\beta}_2 = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \qquad \hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} \tag{2}$$

を示すこと．ここで $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i1}$, $s_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{i1} - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, $s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{i1} - \bar{x})^2$ とする．

[2] $c_i = \frac{(x_{i1} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N}(x_{i1} - \bar{x})^2}$ と置くとき, $\hat{\beta}_2 = \sum_{i=1}^{N} c_i y_i$ と表せることを示すこと．また $\sum_{i=1}^{N} c_i$ の値も求めよ．

[3] [2] の結果を用いて, $E[\hat{\beta}_2]$, $V[\hat{\beta}_2]$ を求めること．

2　数学的予備知識

[4] $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k)'$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_k)'$ とする．このとき

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}'\mathbf{a} = \mathbf{a} \tag{3}$$

を示すこと．

提出日 12 月 8 日（火）