Date . . No.

PROOF

① $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\right)dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{E(X)}\right)dy$

$= E(X)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy}_{E(Y)}$.

②. XとYが独立 $\Rightarrow Cov(X,Y) = \underbrace{E(XY)}_{E(X)E(Y)} - E(X)E(Y) = 0$.

$\Rightarrow \rho = 0$

$\rho = 0 \Rightarrow f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$

$= f_X(x) f_Y(y)$ //

$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

定理

$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$が互いに独立 $\Rightarrow E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$

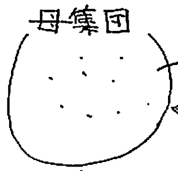
$E(g_1(X_1)g_2(X_2)\cdots g_n(X_n)) = E(g_1(X_1))\cdots E(g_n(X_n))$

$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$

統計量の確率分布.

P75

母集団



$\xrightarrow{\text{抽出}}$ 互いに独立で同一分布に従う確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ← 大きさnの無作為標本・と言う. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim}$ と略記.

$\xleftarrow{\text{推定}}$

⇕

確率分布 $p(x, \theta)$

θ: パラメーター　　Θ: パラメーター空間

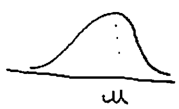
θは未知の数 $\xleftarrow{\text{推定}}$ $T(X_1, \ldots, X_n)$: 統計量 (推定量)

$T(X)$ と略記.

ex. 早大の学生のTOEICの成績

母集団分布 $N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\text{抽出}} X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.

未知のもの



μ: パラメーター　　$\Theta = \{(\mu, \sigma) \mid -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0\}$

$\mu \xleftarrow{\text{推定}} T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

ここで統計量 $T(X)$ 自体が確率変数になっている.

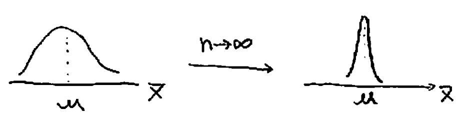
→ $T(X)$ の確率分布やその性質を調べる

標本平均 $\bar{X}$ の期待値, 分散

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim}$　$E(X_i) = \mu$　$V(X_i) = \sigma^2$ とおく.

$E(\bar{X}) = \mu$

$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$



省略する予定.

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

$\frac{(n-1)^2}{n^2}$

Date . . No.

標本分散 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ の期待値, 分散

$$E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$V(S^2)=\frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$$

$\mu_4=E[(X-\mu)^4]$.

P79

たたみこみ (P79)

$X \perp\!\!\!\perp Y$, $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$U=X+Y$ の確率分布 は $f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(u-x)dx$

X, Y: 離散

$f_U(u)=\sum_x f_X(x)f_Y(u-x)$

PROOF:

$$P(U\leq u)=P(X+Y\leq u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{u-x}f_{XY}(x,y)\,dy\right\}dx$$

$x+y=t$ とおく
$y=t-x$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{u}f_{XY}(x,t-x)\,dt\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{u}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(t-x)\,dx\right)dt$$

$\leftarrow \frac{d}{du}\int_{-\infty}^{u}h(t)dt = h(u)$

$$\therefore\quad f_U(u)=\frac{d}{du}P(U\leq u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(u-x)\,dx \qquad \square$$

※ 実際には計算が大変なので別の方法が使われることも多い.

P77

積率母関数

X, Y, $U=X+Y$ の m.g.f. $g_X(\theta)=E\{\exp(\theta X)\}$, $g_Y(\theta)=E\{\exp(\theta Y)\}$

$g_U(\theta)=E\{\exp(\theta U)\}$

$$\Rightarrow\quad g_U(\theta)=\overset{XY}{E}[\exp\{\theta(X+Y)\}]=g_X(\theta)g_Y(\theta)$$

さらに

X_i の m.g.f. $g_{X_i}(\theta)=E\{\exp(\theta X_i)\}$ $(i=1,\dots,n)$

$U=\sum X_i$ の m.g.f.

$$\Rightarrow\quad g_U(\theta)=E\left[\exp\left\{\theta\sum_{i=1}^{n}X_i\right\}\right]=g_{X_1}(\theta)\cdots g_{X_n}(\theta)=\prod^{n}g_{X_i}(\theta)$$

No. Date . .

PROOF.

$$g_U(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} f_U(u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, u-x)\,dx\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} f_{XY}(x, u-x)\,du \right) dx \qquad u-x=y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x+y)} f_{XY}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x+y)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \qquad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e^{\theta y} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} f_Y(y)\,dy$$

$$= g_X(\theta)\, g_Y(\theta).$$

一般的に $T(X_1,\dots,X_n)$ の m.g.f. は

$$g_T(\theta) = E^{*}[\exp(T(X)\theta)] \quad \left(= \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{T(x)\theta\} f_X(x)\,dx_1\cdots dx_n \right)$$

要は T の確率分布を求める必要がないことを表している.

P78

定理

$X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

- $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ ← S の標本分布と言う
- $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ← $\overline{X}$ の 〃
- $Y = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\mu, \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)\sigma^2\right)$

← $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ が X_i と同じ分布型になる時，再生性があると言う

PROOF:

$S = X_1 + X_2$ の m.g.f. $g_S(\theta) = E[\exp\{(X_1+X_2)\theta\}] = g_{X_1}(\theta)\, g_{X_2}(\theta)$

$$= \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)\exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)$$

$$= \exp\left\{(2\mu)\theta + \frac{(2\sigma^2)}{2}\theta^2\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$N(2\mu,\ (2\sigma^2))$$

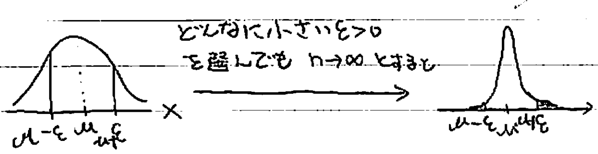
P92 大数の(弱)法則

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim}$ $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ $(i = 1, \dots, n)$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

for $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P_X\{|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon\} = 0$ ← $\bar{X} \to \mu$ $(n \to \infty)$ or $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \bar{X} = \mu$ と書く

※1 for $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P_X\{|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon\} = 1$ と同値.



※2 $\bar{X}$ は μ の一致推定量と言う ← くわしい話は後で言う

Markov の不等式

$E(|X-\mu|^2) < \infty$

$$P_X\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X-\mu|^2)}{\varepsilon^2}$$

PROOF: $P_X\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} = \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f_X(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \varepsilon^2 f_X(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} |x-\mu|^2 f_X(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\underline{\int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^2 f_X(x)\,dx}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E[(X-\mu)^2]$$

No. Date . .

大数の(弱)法則の証明

$E(\bar{X})=\mu$, $V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ より Markov の定理より

$$P\{|\bar{X}-\mu|>\varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\underbrace{\frac{\sigma^2}{n}}_{=E[(\bar{X}-\mu)^2]}\Big) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$ □

中心極限定理 (Central Limit Theorem)

$X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim}$ $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t\right\} = \Phi(t) \quad \text{for } \forall t.$$

ここで $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\phi(x)dx$

具体例はスライドで説明.

PROOFの前にいくつか準備

Taylor展開

- $f(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は区間 (a,b) において n 回微分可能
- $x_0 \in (a,b)$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0) + R_n(x)$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$, ξ は x と x_0 の間にある点.

ex. $f(x)=(1+x)^5$ を $x=1$ の周りで Taylor 展開

$f'(x)=5(1+x)^4$ $\quad f'(1)=5\cdot 2^4=80$

$f''(x)=5\cdot4(1+x)^3$ $\quad f''(1)=5\cdot4\cdot2^3=160$

$f'''(x)=5\cdot4\cdot3(1+x)^2$

$$f(x)=32+80(x-1)+\frac{160}{2}(x-1)^2+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{5\cdot4\cdot3(1+\xi)^2}{3!}(x-1)^3=10(1+\xi)^2(x-1)^3$$

$x=1$ の近くでの $f(x)$ を 2次の多項式で近似

[高次の無限小] $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow f(x)=o(g(x))$

プリント P8

ex $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\log x}}=0$ $\quad \frac{1}{x}=o\left(\frac{1}{\log x}\right)$

連続定理

$X\sim f_X(x),\ X_n\sim f_{X_n}(x)$

$g_X(\theta)=E^X[\exp(\theta X)]$: X の m.g.f. $\quad g_{X_n}(\theta)=E^{X_n}[\exp(\theta X_n)]$: X_n の m.g.f.

$\exists g_{X_n}(\theta)$ for $|\theta|\le\theta_0$

$\exists g_X(\theta)$ for $|\theta|\le\theta_1<\theta_0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}g_{X_n}(\theta)=g_X(\theta)$ for $\forall\theta\in[-\theta_1,\theta_1]$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$ for $F(x)$ の全ての連続点

PROOF 羽鳥 (1974) 確率論の基礎 P251 ← 複素関数論の知識が必要

口で言う

イメージ

$$\begin{array}{ccc} F_{X_n}(x) & \dashrightarrow & F(x) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ g_{X_n}(\theta) & \longrightarrow & g_X(\theta) \end{array}$$

No. Date . .

PROOF $Z_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$. とおく

$$g_{Z_n}(\theta) = E\left[\exp\left(\theta\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left\{\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\sum(X_i-\mu)\right\}\right]$$

$$= E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}(X_i-\mu)\right\}\right] \quad X_1, X_2, \ldots, X_n \text{は互いに独立}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}E\left[\exp\left\{\frac{\theta}{\sqrt{n}}\cdot\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right\}\right]$$

$Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma}$ の m.g.f $g_{Y_i}(\eta) = E[\exp\{\eta Y_i\}] = E\left[\exp\left\{\eta\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right\}\right]$ とすると

$$= \prod_{i=1}^{n}g_{Y_i}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(g_{Y_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad (\because\ g_{Y_1}(\theta) = \cdots = g_{Y_n}(\theta))$$

ここで $\eta=0$ の回りで Taylor 展開すると

$$\underbrace{g_{Y_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)}_{\eta} = g_{Y_1}(0) + \frac{\theta}{\sqrt{n}}g_{Y_1}'(0) + \frac{\theta^2}{2n}g_{Y_1}''(0) + R_{Y_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)$$

$\leftarrow R_{Y_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\theta^3}{6n^{3/2}}g_{Y_1}^{(3)}(\xi)$.

$$g_{Y_1}'(0) = \frac{d}{d\eta}E_{Y_1}[\exp\{\eta Y_1\}]\Big|_{\eta=0} = E[Y_1] = E\left[\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right] = 0$$

$$g_{Y_1}''(0) = \frac{d^2}{d\eta^2}E[\exp\{\eta Y_1\}]\Big|_{\eta=0} = E[Y_1^2] = E\left[\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = 1.$$

$$= 1 + \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{2n}\right)$$

$$\therefore\ g_{Z_n}(\theta) = \left\{1+\frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{\theta^2}{2n}\right)\right\}^n$$

$\leftarrow \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$

$$= \left\{1+\frac{\theta^2}{2n}+o\left(\frac{\theta^2}{2n}\right)\right\}^{\frac{1}{\frac{\theta^2}{2n}+o\left(\frac{\theta^2}{2n}\right)}\cdot n\left(\frac{\theta^2}{2n}+o\left(\frac{\theta^2}{2n}\right)\right)}$$

$$= \left\{1+\square\right\}^{\frac{1}{\square}\cdot\left(\frac{\theta^2}{2}+o\left(\frac{\theta^2}{2}\right)\right)}.$$

$$\longrightarrow \underset{g_Z(\theta)}{\overset{\shortparallel}{e^{\frac{\theta^2}{2}}}} \quad (n\to\infty).$$

$g_Z(\theta)$ Z の m.g.f

$\lim_{n\to\infty} f_n = f > 0$

$\lim_{n\to\infty} g_n = g$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underset{\log f_n^{g_n}}{\underbrace{g_n\log f_n}} = \underset{\log f^g}{\underbrace{g\log f}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n^{g_n} = f^g$.

なぜ $x=0$ の回りで展開するのか
($\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$ ($n\to\infty$) だから) ← 口で言う.

p97
法則収束 (Convergence in law).

・ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ X 確率変数

・ $F_1(x), \dots, F_n(x), \dots F(x)$ c.d.f.

X_n は X に法則収束 $\overset{def}{\iff}$ For $F(x)$ の任意の連続点 x,
$X_n \xrightarrow{L} X$ $\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$

P96 の CLT は $Z \sim N(0,1)$ とすると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{L} Z \ (n\to\infty)$$ と書くことができる.

この時 $\bar{X}$ は漸近的に $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う と言う.

ex,

$$P(68<\bar{X}\leq 71) = P\left(\frac{68-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{71-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

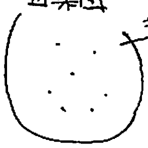
$$\approx \Phi\left(\frac{71-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{68-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$ $\leftarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt.$

確率を正規分布で近似できる.

点推定

(review) P75

母集団



抽出 → $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} P(x,\theta)$

⇕

確率分布

$P(x,\theta)$

θ : パラメーター $\xleftarrow{\text{推定}}$ $T(X_1,\dots,X_n)$ or $\hat{\theta}(X)$ 推定量

$\hat{\theta}$ と略記

ー 推定方法 ー

P105 モーメント法　$X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} P(x,\theta)$　$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \text{ とする.}$$

← ex. $M'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$M'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

ここで

$$\begin{cases} E_\theta(X_1) = M'_1 \\ E_\theta(X_1^2) = M'_2 \\ \quad\vdots \\ E_\theta(X_1^k) = M'_k \end{cases} \quad (※1)$$

← 以前, 大数の法則で

$M'_1 = \overline{X} \xrightarrow{P} E_\theta(X_1)$

$M'_2 = \overline{X^2} \xrightarrow{P} E_\theta(X_1^2)$

をやった. 実は $M'_r \xrightarrow{P} E_\theta(X_1^r)$ が言える.

とき, (※1)を満たす θ を $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ とする.

$\hat{\theta}$ を θ の <u>モーメント推定量</u> と言う.

← ^ (ハット)は推定量を表わす.

ex1.　$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$　$\theta = (\mu, \sigma^2)$ 未知のパラメーター

$$\overline{X} = E_\theta(X_1) = \mu$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E_\theta(X_1^2) = \mu^2 + \sigma^2.$$

$$\mu = \overline{X}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

ex2.　$X_1, X_2, \dots, X_n \sim B(10, p)$　$\theta = p$

$$\overline{X} = E_\theta(X_1) = 10p$$

$$\hat{p} = \frac{1}{10}\overline{X}$$

P106 ー最尤法ー

袋の中に 100個の白球，赤球が入っている．

赤 100p 個　白 100(1−p)個

10個の球を袋から復元抽出で取り出す

X：赤球の個数．

$X \sim B(10, p) \Leftrightarrow P(X=k) = {}_{10}C_k p^k (1-p)^{10-k} \quad (k=0,\dots,10)$

今，3個 赤球だったとする

↖ 実現値と言う．

$P(X=3) = {}_{10}C_3 p^3 (1-p)^7$

p	P(X=3)
0.2	0.20…
⋮	
0.3	0.26…
0.5	0.11…

p=0.3 の時，P(X=3)は最も高い値をとる　← 口で言う　もし p=0.5 だったら 赤球はもっと出るはず．X=3 となるためには その確率が最も高く ないといけない という考え方

$\hat{p} = 0.3$ と推定　← これを最尤推定量 (MLE) と言う．

ー定式化ー

$P_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n, \theta)$ ：$\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ の p.d.f　$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$

① $X_1 = \tilde{x}_1, X_2 = \tilde{x}_2, \dots, X_n = \tilde{x}_n$ という値をとったとする．

② $L(\theta) = P_{\mathbb{X}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \theta)$ を最大にする θ を求める

↑ これを尤度関数と言う．

②′ もしくは $\ell(\theta) = \log P_{\mathbb{X}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \theta)$ を最大にするθを求める

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell(\theta) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ell(\theta) = 0 \end{array} \right.$$

を解く．　← 尤度方程式と言う

No. Date . .

ex. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$p(x;\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}.$$

$$\ell(\theta) = \log p(x,\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu = 0 \quad \underline{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\theta) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \iff \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\iff \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$