高崎経済大学論集　第50巻　第３・４合併号　2008　87頁～96頁

公共財の自発的供給と経済成長

柳　瀬　明　彦

Voluntary Provision of Public Goods and Economic Growth

Yanase Akihiko

Abstract

This paper examines an endogenous growth model with a public good, which is produced by individual agents' voluntary labor contributions and which accumulates over time. The existence, uniqueness and stability of the balanced growth equilibrium are examined, and comparative static results are derived.

1　はじめに

個人や民間企業による公共財の自発的供給は、近年、政府部門が供給する公共財と比肩する水準になっている。公共財の自発的供給とはすなわち、公共財からの便益を受ける個人やグループが、金銭あるいは資源の拠出によって公共財供給の費用を自発的に負担することである。政府による公共財の供給とは異なり、自発的供給の状況下では公共財からの便益を受ける各経済主体が自分で負担額を決定し、しかも負担額に関して主体間で事前の取り決めが必ずしも行われるわけではない。したがって、公共財の自発的供給の代表的な理論モデルは、非協力ゲーム理論を用いたものとなる[1]。

現実の経済においては、環境の質の変化、教育を通じた人的資本の蓄積、技術者間のネットワークやコミュニケーションを通じた先端技術の開発など、公共財がストックとして経済に影響を与えるケースが数多く存在する。このような動学的経済環境の下で公共財の自発的供給は、微分ゲーム（differential game）を用いて検討される。代表的な研究として、Fershtman and Nitzan (1991)、Wirl (1996)、Itaya and Shimomura (2001)、Shibata (2002)、柴田（2004）、板谷（2004）が挙げられる。特に、Shibata (2002) および柴田（2004）は、民間経済主体による自発的な所得の拠出によっ

1　自発的供給を含めた公共財の経済理論については、Cornes and Sandler (1996) を参照。

て供給される公共財ストック（インフラあるいは社会資本と解釈される）が経済成長の源泉となるモデルを、内生的成長理論の枠組みで分析している。

本稿は、Shibata (2002) や柴田（2004）と同様、公共財ストックの自発的供給と経済成長との関係を理論的に考察する。Shibata (2002) においては公共財ストックが時間を通じて蓄積し経済効果をもたらす一方、各個人の所有する私的資本ストックは各時点において完全に減耗し蓄積が行われないという仮定が置かれている[2]。これに対して本稿では、各個人の私的資本ストックも時間を通じて蓄積する状況を想定している。また本稿においては、公共財の自発的費用負担は、所得の拠出ではなく、労働の提供という形で行われると仮定する。各経済主体の効用は私的財の消費、公共財ストック、そして余暇に依存すると仮定し、したがって余暇、私的財生産に投入する労働、公共財生産に投入する労働、の配分の問題を考慮に入れる。このような設定の下で、本稿は、私的資本ストックおよび公共財ストックの蓄積に関する動学的制約の下で民間経済主体が自らの生涯効用の最大化を目指して行動する動学ゲームのナッシュ均衡を求め、ナッシュ均衡における経済成長経路の性質を検討する。長期定常状態である均斉成長経路の存在、一意性、安定性の検討を行い、また、この経済の様々な外生的与件が変化した場合の定常解への影響を検討する。

2　モデル

$N>1$ 人の同質的なプレイヤーが存在する経済を想定する。各プレイヤーは私的財の消費 c_i、余暇 l_i、そして公共財ストック X から効用を得るものとし $(i=1,\cdots,N)$、プレイヤー i の生涯効用 U_i が次の式で与えられると仮定する：

$$U_i=\int_0^{\infty}e^{-\rho t}\left[\log c_i(t)+\lambda\log l_i(t)+\xi\log X(t)\right]dt. \tag{1}$$

ここで $\rho>0$ は時間選好率であり、パラメター λ と ξ はともに正数とする。

各プレイヤーは自らの所有する資本ストック k_i と労働 n_i を用いて私的財の生産を行うものとし、プレイヤー i の生産関数が $y_i=Ak_i^{\alpha}n_i^{1-\alpha}\bar{k}^{1-\alpha}$ で与えられると仮定する。ここで $\bar{k}$ は経済全体の平均的な私的資本ストック水準であり、各プレイヤーにとっては外部性であると仮定する。また、パラメター A と α は $A>0$ および $0<\alpha<1$ を満たすものとする。$\delta_K\geq 0$ を私的資本の減耗率とすると、プレイヤー i の所有する資本ストックの蓄積方程式は次の式で与えられる[3]：

$$\dot{k}(t)=Ak_i(t)^{\alpha}n_i(t)^{1-\alpha}\bar{k}(t)^{1-\alpha}-c_i(t)-\delta_K k_i(t),\quad k_i(0)=k_0>0. \tag{2}$$

各時点で生み出される公共財のフローは、各プレイヤーの労働の拠出 $1-l_i-n_i$ と[4]その時点の

2　柴田（2004）は、Shibata (2002) をさらに単純化したモデルを分析しており、そこでは生産活動が公共財ストック水準にのみ依存し、私的資本ストックが存在しないと仮定されている。
3　変数の上のドット記号は、その変数の時間 t に関する微分を表す。
4　すなわち、各プレイヤーは各時点において最大限1単位の労働を提供可能であり、それを余暇、私的財生産、公共財生産にそれぞれ配分すると仮定する。

公共財ストックとに依存し、その生産関数は $x = B\left[\sum_{i=1}^{N}(1 - l_i - n_i)\right]^{\beta} X$で与えられると仮定する。ここでパラメター B とβは $B > 0$ および $0 < \beta < 1$ を満たすものとする。ただし、各プレイヤーにとって、公共財生産における X の効果は外部性であると仮定する。公共財ストックの減耗率を$\delta_X \geq 0$ で表すことにすると、各プレイヤーの直面する公共財ストックの蓄積方程式は次の式で与えられる：

$$\dot{X}(t) = B\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[1 - l_i(t) - n_i(t)\right]\right\}^{\beta} \bar{X}(t) - \delta_X X(t), \quad X(0) = X_0. \tag{3}$$

3　ナッシュ均衡成長経路

各プレイヤーは、他のプレイヤーの戦略を所与として、制約条件（２）および（３）の下で、自らの生涯効用（１）を最大にするように行動すると仮定する。このような非協力ゲームにおける戦略として、本稿ではオープンループ戦略（open-loop strategy）を想定する。すなわち、各プレイヤーは初期時点において将来にわたる戦略の経路を決定し、ゲームの途中で戦略を変更することはないと仮定する[5]。

経常価値ハミルトニアンを以下のように定義する：

$$H = \log c_i + \lambda \log l_i + \xi \log X + m_1\left\{A k_i^{\alpha} n_i^{1-\alpha} \bar{k}^{1-\alpha} - c_i - \delta_K k_i\right\} + m_2\left\{B(1 - l_i - n_i + L_{-i})^{\beta} \bar{X} - \delta_X X\right\}.$$

ここで $L_{-i} \equiv \sum_{j \neq i}(1 - l_j - n_j)$ はプレイヤー i 以外のプレイヤーによる公共財生産への労働拠出の合計である。最適化の必要条件は、

$$\frac{\partial H}{\partial c_i} = \frac{1}{c_i} - m_1 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_i} = \frac{\lambda}{l_i} - m_2 B\beta\left[1 - l_i - n_i + L_{-i}\right]^{\beta-1} \bar{X} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n_i} = m_1 A(1-\alpha) k_i^{\alpha} n_i^{-\alpha} \bar{k}^{1-\alpha} - m_2 B\beta\left[1 - l_i - n_i + L_{-i}\right]^{\beta-1} \bar{X} = 0, \tag{6}$$

$$\dot{m}_1 = \rho m_1 - \frac{\partial H}{\partial k_i} = \rho m_1 - m_1 A\alpha k_i^{\alpha-1} n_i^{1-\alpha} \bar{k}^{1-\alpha} + m_1 \delta_K, \tag{7}$$

$$\dot{m}_2 = \rho m_2 - \frac{\partial H}{\partial X} = \rho m_2 - \frac{\xi}{X} + m_2 \delta_X, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m_1(t) k_i(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m_2(t) X(t) = 0 \tag{9}$$

から成る。（４）式、（５）式、（６）式はそれぞれ制御変数 c_i、l_i、n_i に関する最大値原理であり、（７）式と（８）式はそれぞれ補助変数 m_1 と m_2 に関するオイラー方程式である。また、（９）式は横断性条件を表している。

この経済においては、すべてのプレイヤーは同質的であると仮定されているので、以下の分析で

5　これに対して、各プレイヤーの戦略が状態変数の値に依存し、したがってゲームの途中で変更可能な戦略をフィードバック戦略（feedback strategy）と呼ぶ。

は対称均衡を考える：

$$c_i = c,\quad k_i = \bar{k} = k,\quad n_i = n,\quad l_i = l,\quad \bar{X} = X,\quad \forall i = 1, \cdots, N. \tag{10}$$

(10) 式を上記の最適条件に代入して整理すると、

$$\frac{1}{c} = m_1, \tag{11}$$
$$\frac{\lambda}{l} = m_2 B\beta\left[N(1-l-n)\right]^{\beta-1} X = m_1 A(1-\alpha) n^{-\alpha} k, \tag{12}$$
$$\dot{m}_1 = (\rho + \delta_K - A\alpha n^{1-\alpha}) m_1, \tag{13}$$
$$\dot{m}_2 = (\rho + \delta_X) m_2 - \frac{\xi}{X} \tag{14}$$

を得る。また、(2) 式と (3) 式は次のように書き換えられる：

$$\dot{k} = An^{1-\alpha} k - c - \delta_K k, \tag{15}$$
$$\dot{X} = B\left[N(1-l-n)\right]^{\beta} X - \delta_X X. \tag{16}$$

3．1　均斉成長経路

(11) 式と (12) 式より、

$$\frac{c}{k} = \frac{A(1-\alpha)}{\lambda} n^{-\alpha} l \tag{17}$$

を得る。したがって、(15) 式は次のように書き換えられる：

$$\frac{\dot{k}}{k} = An^{1-\alpha} - \frac{A(1-\alpha)}{\lambda} n^{-\alpha} l - \delta_K. \tag{18}$$

(11) 式を時間について微分したものと (13) 式より、

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{m}_1}{m_1} = A\alpha n^{1-\alpha} - \rho - \delta_K \tag{19}$$

を得る。(12) 式を時間について微分すると、

$$-\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{m}_2}{m_2} + (1-\beta)\frac{l}{1-l-n}\frac{\dot{l}}{l} + (1-\beta)\frac{n}{1-l-n}\frac{\dot{n}}{n} + \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} - \alpha\frac{\dot{n}}{n} + \frac{\dot{k}}{k} \tag{20}$$

を得る。ここで m_2 の変化率は、(12) 式および (14) 式より

$$\frac{\dot{m}_2}{m_2} = \rho + \delta_X - \frac{\xi}{\lambda} B\beta\left[N(1-l-n)\right]^{\beta-1} l \tag{21}$$

と求められる。

(16) 式、(18) 式、(19) 式、(20) 式、(21) 式を整理すると、

$$-\frac{\dot{l}}{l} + \alpha\frac{\dot{n}}{n} = F(l, n), \tag{22}$$
$$-\left[1 + (1-\beta)\frac{l}{1-l-n}\right]\frac{\dot{l}}{l} - (1-\beta)\frac{n}{1-l-n}\frac{\dot{n}}{n} = G(l, n) \tag{23}$$

という２本の式が導かれる。ここで

$$F(l,n) \equiv A(1-\alpha)n^{1-\alpha} - \frac{A(1-\alpha)}{\lambda}n^{-\alpha}l + \rho, \tag{24}$$

$$G(l,n) \equiv B\left[N(1-l-n)\right]^{\beta} - \frac{\xi}{\lambda}B\beta\left[N(1-l-n)\right]^{\beta-1}l + \rho \tag{25}$$

である。(22) 式と (23) 式を $\dot{l}/l$ と $\dot{n}/n$ について解くと、

$$\frac{\dot{l}}{l} = -\frac{(1-\beta)nF(l,n) + \alpha(1-l-n)G(l,n)}{\alpha + (1-\alpha-\beta)n - \alpha\beta l}, \tag{26}$$

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{(1-n-\beta l)F(l,n) - (1-l-n)G(l,n)}{\alpha + (1-\alpha-\beta)n - \alpha\beta l} \tag{27}$$

を得る。この経済のナッシュ均衡動学体系は、l と n に関する連立微分方程式 (26) および (27) で表現される[6]。

$\dot{l} = \dot{n} = 0$ となる定常状態において、l と n の定常均衡値が決定される。(22) 式および (23) 式から明らかに、定常解のペア (l^*, n^*) は $F(l^*, n^*) = G(l^*, n^*) = 0$ を満たす。このような定常状態の存在と一意性を、以下では図を用いて検討しよう。

$$F(l,n) = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \lambda n + \frac{\rho\lambda}{A(1-\alpha)}n^{\alpha}$$

より、$F(l,n) = 0$ を満たす l と n の組み合わせは、図１に示されるように、原点を通る右上がり

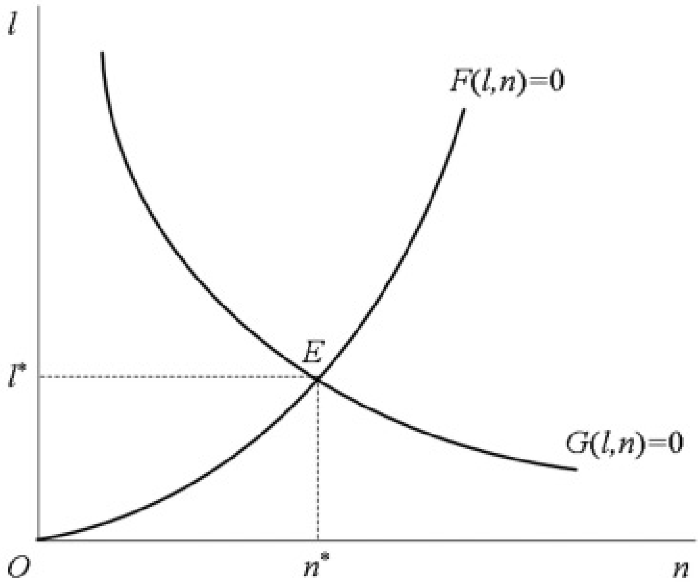

図１：定常状態の存在と一意性

6　(16) 式と (18) 式を見ると、k と X の成長率は l と n の値に依存し、また (19) 式より、c の成長率は n にのみ依存する。したがって、(26) 式と (27) 式から求められる l と n の動学を調べれば、この経済の均衡経路の性質が明らかとなる。

の曲線で表される。一方、$G(l,n)=0$ を全微分して整理すると、

$$\left.\frac{dl}{dn}\right|_{G(l,n)=0}=-\frac{G_n}{G_l},$$
$$G_n=-\frac{B\left[N(1-l-n)\right]^{\beta}\beta\left[N\lambda(1-l-n)+(1-\beta)\xi l\right]}{N\lambda(1-l-n)^2}<0,$$
$$G_l=-\frac{B\left[N(1-l-n)\right]^{\beta}\beta\left[N\lambda(1-l-n)+\xi(1-n-\beta l)\right]}{N\lambda(1-l-n)^2}<0$$

を得るので、$G(l,n)=0$ を満たす l と n の組み合わせは、右下がりの曲線で表される。したがって、図１より明らかに、定常解は一意に存在する。ただし、経済学的に意味のある定常解は $0<l^*<1$ および $0<n^*<1$ を満たすものでなくてはならない。以下の分析では、$0<l^*<1$ および $0<n^*<1$ が成立するように各パラメターが設定されていると仮定する[7]。

定常状態において、すべての経済変数は一定率で成長する。このような均斉成長経路（balanced growth path）における変数 z の成長率を g_z で表すことにしよう。(17) 式より、k と c は定常状態において同率で成長することが分かるので、これらの成長率は（19）式を用いて以下のように表される：

$$g_k=g_c=A\alpha(n^*)^{1-\alpha}-\rho-\delta_K. \tag{28}$$

また、(16) 式より、X の成長率は次のように求められる：

$$g_X=B\left[N(1-l^*-n^*)\right]^{\beta}-\delta_X. \tag{29}$$

３．２　定常状態の安定性

次に、定常状態の安定性を検討しよう。動学体系（26）および（27）を定常状態の近傍で線形近似すると、

$$\begin{bmatrix}\dot{l}\\ \dot{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j_{ll} & j_{ln}\\ j_{nl} & j_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l-l^*\\ n-n^*\end{bmatrix}, \tag{30}$$
$$j_{ll}\equiv-\frac{\left[(1-\beta)n^*F_l+\alpha(1-l^*-n^*)G_l\right]l^*}{\alpha+(1-\alpha-\beta)n^*-\alpha\beta l^*},\quad j_{ln}\equiv-\frac{\left[(1-\beta)n^*F_n+\alpha(1-l^*-n^*)G_n\right]l^*}{\alpha+(1-\alpha-\beta)n^*-\alpha\beta l^*},$$
$$j_{nl}\equiv\frac{\left[(1-n^*-\beta l^*)F_l-(1-l^*-n^*)G_l\right]n^*}{\alpha+(1-\alpha-\beta)n^*-\alpha\beta l^*},\quad j_{nn}\equiv\frac{\left[(1-n^*-\beta l^*)F_n-(1-l^*-n^*)G_n\right]n^*}{\alpha+(1-\alpha-\beta)n^*-\alpha\beta l^*}$$

を得る。

線形体系（30）のヤコビ行列の行列式とトレースはそれぞれ、

$$j_{ll}j_{nn}-j_{ln}j_{nl}=\frac{(1-l^*-n^*)\left[\alpha(1-n^*-\beta l^*)+(1-\beta)n^*\right]l^*n^*}{\left[\alpha+(1-\alpha-\beta)n^*-\alpha\beta l^*\right]^2}(F_lG_n-F_nG_l), \tag{31}$$

7　パラメターの値によっては、これらの条件は必ずしも成立するとは限らない。

$$j_{ll}+j_{nn}=\frac{\left[(1-n^*-\beta l^*)F_n-(1-\beta)l^*F_l\right]n^*-(1-l^*-n^*)(n^*G_n+\alpha l^*G_l)}{\alpha+(1-\alpha-\beta)n^*-\alpha\beta l^*} \tag{32}$$

と求められるが、

$$F_l=-\frac{A(1-\alpha)}{\lambda}n^{-\alpha}<0,\quad F_n=A(1-\alpha)^2n^{-\alpha}+\frac{A\alpha(1-\alpha)}{\lambda}n^{-\alpha-1}l>0,$$

および $G_l, G_n<0$ より、行列式とトレースはいずれも正の値をとることが分かる。すなわち、線形動学体系（30）の定常状態 (l^*, n^*) は不安定である。

l^* と n^* はともにジャンプ可能な変数なので、定常状態 (l^*, n^*) が不安定であることは、この経済のナッシュ均衡経路には移行動学が存在しないことを意味している。すなわち、初期時点において $(l, n)=(l^*, n^*)$ が直ちに選ばれ、経済は初期時点から均斉成長経路上に乗ることになる。

4　比較静学

本節では、 前節で導出した定常均衡が、 この経済の外生的与件の変化によってどのような影響を受けるかを検討する[8]。

4．1　私的財の生産性の上昇

私的財の生産性パラメター A の上昇は、$F(l,n)=0$ 線の下方シフトをもたらす。その結果、図２

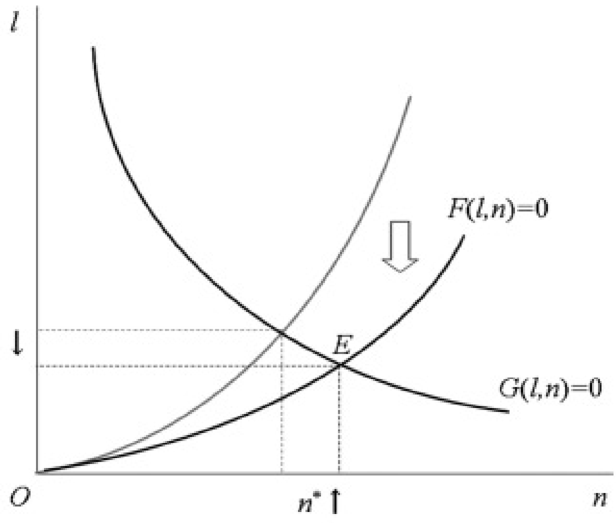

図２：私的財生産性の上昇の効果

8　前節で示したように、この経済には移行動学が存在しないので、外生的与件の変化によって経済は直ちに新しい定常点に移る。

に示されるように、定常状態における私的財への労働投入 n^* は増加する一方、余暇 l^* は減少する。

（28）式より明らかなように、n^* の増加は私的財の生産および消費の成長率を上昇させる。これに対して、公共財ストックの成長率については、（29）式と図2からは明確な結果は得られない。しかし、（24）式および（25）式より、

$$\frac{\partial[n^*+l^*]}{\partial A}=\frac{\rho}{A}\frac{G_n-G_l}{F_lG_n-F_nG_l}=\frac{\rho B\left[N(1-l^*-n^*)\right]^{\beta-1}\beta\xi}{\lambda A(F_lG_n-F_nG_l)}>0 \tag{33}$$

となるので、公共財ストックの成長率は A の上昇によって低下することが分かる。

4．2　公共財の生産性の上昇

公共財の生産性パラメター B の上昇は、$G(l,n)=0$ 線の下方シフトをもたらす[9]。したがって、図3に示されるように、定常状態における私的財への労働投入 n^* と余暇 l^* はともに減少する。その結果、公共財ストックの成長率は上昇する一方、私的財の生産および消費の成長率は低下する。

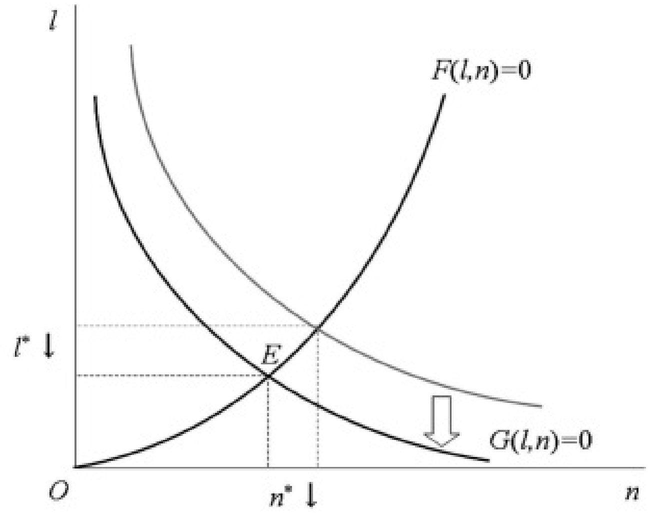

図3：公共財生産性の上昇の効果

4．3　プレイヤーの数の増加

この経済におけるプレイヤーの数 N の増加は、$G(l,n)=0$ 線の下方シフトをもたらす。したがって、B の上昇と同様、n^* と l^* はともに減少し、公共財ストックの成長率は上昇する一方、私的財の生産および消費の成長率は低下する。

9　$G(l,n)=0$を全微分して整理すると$G_ldl+G_ndn=(\rho/B)\,dB$ となることと、G_l と G_n はともに負値をとることから、明らかである。

4．4　時間選好率の上昇

各プレイヤーの時間選好率 ρ の上昇は、$F(l,n)=0$ 線と $G(l,n)=0$ 線 をともに上方にシフトさせる。したがって、図 4 に示されるように、定常状態における余暇 l^* は増加する一方、私的財への労働投入 n^* が増えるか減るかは明らかでない。また、

$$\frac{\partial[n^*+l^*]}{\partial\rho}=\frac{F_n-F_l+G_l-G_n}{F_lG_n-F_nG_l} \tag{34}$$

の符号も確定しない[10]。したがって、私的財の生産・消費の成長率および公共財ストックの成長率ともに、ρ の上昇による影響は確定しない。

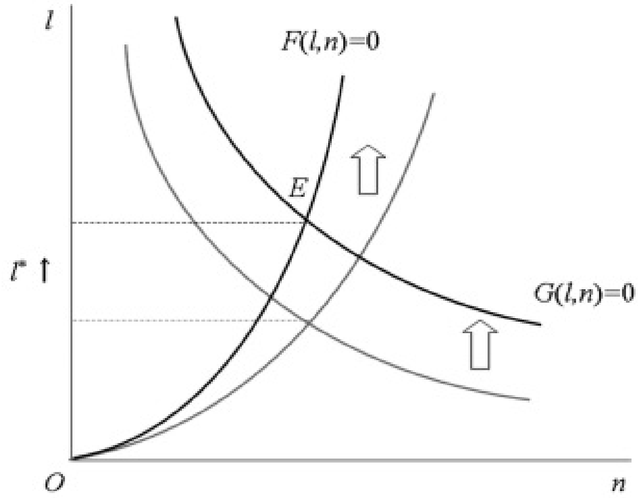

図 4 ：時間選好率の上昇の効果

5　おわりに

本稿は、民間経済主体の自発的な労働供給によって生産され、時間を通じて蓄積しストックとしての経済効果を持つ公共財の存在を考慮に入れた、内生的成長モデルを分析した。長期定常状態である均斉成長経路の存在、一意性、安定性の検討を行い、この経済の外生的与件の変化に関する比較静学分析を行った。しかしながら、公共財の自発的供給の存在する成長経済のモデルは、必ずしも本稿で定式化されたような形のモデルに限らず、異なるモデル化はいくらでも可能である。異なるタイプのモデルの下での経済成長経路の分析は、今後の興味ある研究課題である。また、本稿では非協力微分ゲームにおける戦略として、最も単純なオープンループ戦略を想定したが、部分ゲー

10　$F_n-F_l>0$ である一方、$G_l-G_n<0$ である。

ム完全性の観点からはフィードバック戦略を想定するのが望ましい。この点についてのより詳細な検討も、今後の課題としたい。

（やなせ　あきひこ・本学経済学部准教授）

参考文献

[1] Cornes, R. and T. Sandler (1996), ***The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods,*** Cambridge University Press.

[2] Fershtman, C. and S. Nitzan (1991), Dynamic Voluntary Provision of Public Goods, ***European Economic Review*** 35, 1057-1067.

[3] 板谷淳一（2004），「公共財の自発的供給と推測的変動」，西村和雄・福田慎一［編］『非線形均衡動学—不決定性と複雑性—』，第９章。

[4] Itaya, J. and K. Shimomura (2001), A Dynamic Conjectural Variations Model in the Private Provision of Public Goods: A Differential Game Approach, ***Journal of Public Economics*** 81, 153-172.

[5] Shibata, A. (2002), Strategic Interactions in a Growth Model with Infrastructure Capital, ***Metroeconomica*** 53, 434-460.

[6] 柴田章久（2004），「ダイナミック・ゲームと経済動学」，西村和雄・福田慎一［編］『非線形均衡動学—不決定性と複雑性—』，第６章。

[7] Wirl, F. (1996), Dynamic Voluntary Provision of Public Goods: Extension to Nonlinear Strategies, ***European Journal of Political Economy*** 12, 555-560.