高崎経済大学論集　第50巻　第３・４合併号　2008　47頁～60頁

白票を考慮したバンザフ指数に関する幾つかの性質

山　本　喜　則

Some Properties on Banzhaf Indices Treating Abstention

Yamamoto Yoshinori

Abstract

In a majority voting situation such as an assembly or a general meeting of share holders, an analysis on an actual power over the number of seats or the number of shares is a significant problem that may reflect to the future strategy.　Several kinds of indices that could represent such a power have been proposed so far, and among them Sharpley-Shubic index and Banzhaf index are particularly well known in terms of gaming theory.　The author explored the Banzhaf index from a logic function point of view, and extended it to ternary logic aiming the extended index to reflect an actual majority voting situation more precisely [15].　This paper further discusses the extended definition, giving detailed proofs for several induced theorems, and shows the relationship between the original Banzhaf index and the extended index.

１．はじめに

投票によって物事を決する場合は、世の中に数多い。なかでも政治の世界では、議案を通さなくてはならないから、過半数を超える議席数を確保していないときは、政党は連立を試みる。単に議席数だけに基づいて過半数を超える組み合わせ（提携と言う）を見出すのは、数理科学に於けるある種の組み合わせ最適化問題となる。このとき、議席数で明確な差がある政党間でも、過半数を超えるという目的を実現するためだけならば提携の効果は実は同じであるなどということが起こる。こうしたことは、持ち株数に応じて議決権が決まる株主総会の場合でも起こりえる。

これらの投票行動は主にゲーム理論の分野で、重み付き多数決ゲームと呼ばれて研究されてきている。投票行動で、重みは影響力を表す指数として重要なものであるが、投票者の行動を詳しく解析して、より現実に即した影響力を表現する指数（パワー指数と呼ばれる）が、1960年代既に多く

の研究者から提案されている。シャープレイ・シュービック指数［１、３］、バンザフ指数［２、３、４］などがそれで、両者は密接な関連がある。ところがこれらの指数の定義は、本来は、現実には存在する白票（中立）を考慮に入れていない。無視しているのではなく考え方には入っているという指摘もあるが、特に1990年代になって白票の存在を明確に取り入れたこれらの指数の拡張定義が幾つかなされた［16、17］。それらの拡張は基本的には数学の組合せ論の立場で指数を算出することを前提にしている。

最近、山本は［14、15］で、バンザフ指数を論理関数の立場から論じ、白票を考慮し得る指数、拡張バンザフ指数を３値論理関数の立場で定義した。そこでは、現実世界のいくつかの事例に適用して、本来のバンザフ指数によるものと比較検討している。シャープレーシュービック指数を３値に拡張する試みは既に行われているが、バンザフ指数では明らかでなく、また論理関数の立場からの考察は他に見あたらない。［15］では特に、論理関数の立場で考察することで拡張の方向が明確になることを述べている。本稿では、基本的な定義をさらに精査し、関連する幾つかの性質を明らかにする。

２．準備

$V_2=\{0,1\}$ とするとき、V_2^n から V_2 への写像を２値論理関数 $f(X)$ という。同様に、$V_3=\{0,1/2,1\}$ とするとき V_3^n から V_3 への写像を３値論理関数、V_3^n から V_2 への写像を３値入力２値出力論理関数という。明らかに、これは３値論理関数の特別な場合であるので、区別しないで用いることがある。以下では、２値論理関数に関する公知の事柄は特に説明抜きで用いる。演算 AND、OR、NOT を以下のように定める。ここに、$x_i \in V_2$（または、$x_i \in V_3$）

$$\left.\begin{array}{l} \text{AND} \wedge : x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\} \\ \text{OR} \vee : x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\} \\ \text{NOT} : \bar{x}_i = 1 - x_i \quad (-\text{ は算術差}) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

さらに、通常の算術演算子＋と・（算術乗算）も用いる。

３値論理関数 $f(X)$ と $g(X)$ が任意の $X \in V_3^n$ に対して

$$f(X) \leqq g(X) \qquad (2)$$

を満たすとき、$f(X) \subseteq g(X)$ と記す。

投票による物事の決定システムをここでは投票ゲームと呼び、投票行動を行う者をプレイヤーと呼ぶ。投票によるある決定方式において、賛成票がどのようにあれば対象の議案が採択されるかのルールが表す投票方式を yes-no-voting system という［３］。

一般に、Yes を１に、No を０に対応づけた２値論理関数の真理値表が全ての Yes、No の組み合せに対する決定（decision）を表していることは明らかである。言い換えると、yes-no-voting system は２値論理関数上で解析可能なものであると言える。yes-no-voting system において特に、各投票者がそれぞれ何票かの票を持ち、その多数決（または、全体の 2/3 など定められている基準）によって決定が行われる yes-no-voting system は、weighted-voting system という［３］。

n 人のプレイヤーから成る一つの投票ゲームにおいて、プレイヤーを単に i のように表す。提出された議案に対して各プレイヤーは賛成（Yes）、反対（No）どちらかの意思を持っているものとする。全てのプレイヤーの１組の Yes、No の組合せを提携（coalition）と言い、議案が可決に至る提携を勝利提携（winning-coalition）、否決に至る提携を敗北提携（losing-coalition）と呼ぶ。

バンザフ指数は米国の J. F. Banzhaf により1965年に定義されたもので、現在は以下のように記述される。

〈**定義１**〉［２、３］ある提出された議案に対して、投票者全員が賛成か反対かを明らかにしているとき、自らの投票態度を賛成から反対に変えることにより採決の結果を可決から否決に変える（すなわち、勝利提携から敗北提携に変える）ことのできる投票者はスイング（swing）の役割を果たしているという。賛成、反対の組み合わせが全て同じ確率で起こるとしたとき、投票者 i のスイングの回数（個数）を $BP(i)$ で表す。このとき、投票者 i に対するスイングの回数の期待値をこの投票者のバンザフ指数といい B_i で表す。すなわち、

$$B_i = \frac{BP(i)}{2^{n-1}} \tag{3}$$

さらに、各 $BP(i)$ の大きさの全体に対する比の値を LB_i と記し、相対（バンザフ）指数という。すなわち、

$$LB_i = \frac{BP(i)}{\sum_{i=1}^{n} BP(i)} \tag{4}$$

■

バンザフは本来はスイングの回数 $BP(i)$ を指数として用いたが、現在はこれは raw Banzhaf 指数とか Banzhaf power と呼ばれている［３］。一方、Sharpley は初期の文献［４］では相対指数を正規化されたバンザフ指数と呼び、ここでのバンザフ指数を swing probability と呼んでいる。さらに、［５］では敗北提携から勝利提携に変わる場合もスイングに含めている。

（例１）［５］ある企業において、全株が４人の株主ａ、ｂ、ｃ、ｄによって所有されており、ａは全株の40％、ｂは30％、ｃは20％、ｄは10％を所有している。株主総会での議案の可決には賛成者の所有する株の割合が50％超あることが必要である。このときの、各所有者のバンザフ指数を求める。賛成を１、反対を０、さらに採択結果が成立するときを１、不成立を０で表すとき、全ての組合わせについてどの投票者がスイングになっているかをまとめると表１のようになる。なお、［５］では賛成、反対をそれぞれＹ、Ｎを用い、結果が成立は Pass、不成立は Fail で表しているが、以下で論じるようにこの表は実は２値真理値表であるので１、０を用いる。

表1　例1の各組合せにおけるスイング
Table 1　Swings in the combinations in Example 1

各投票者の投票				結果	×はスイング			
a	b	c	d		a	b	c	d
0	0	0	0	0				
0	0	0	1	0				
0	0	1	0	0				
0	0	1	1	0				
0	1	0	0	0				
0	1	0	1	0				
0	1	1	0	0		×	×	×
0	1	1	1	1		×	×	
1	0	0	0	0				
1	0	0	1	0	×			
1	0	1	0	1	×		×	
1	0	1	1	1	×			
1	1	0	0	1	×	×		
1	1	0	1	1	×			
1	1	1	0	1				
1	1	1	1	1				

たとえば、勝利提携（a, b, c, d）=（1, 1, 0, 0）において、aの票が1から0に変わると賛成票は30%になり過半数を下回り、結果は1から0に変わる。よってaはこのときスイングである。同様に、bが1から0に変わっても賛成票は40%になり過半数を下回り、結果は否決となるからbはスイングである。これら全てを示した表1より、a、b、c、dがスイングになる回数はそれぞれ5、3、3、1回なので、$2^{4-1}=8$で割った値が各投票者のバンザフ指数になる。すなわち、これらを集合的にBと表すと、

$$B=(B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4)=(5/8,\ 3/8,\ 3/8,\ 1/8)$$

■

バンザフ指数の算出式を一般的に記述すると定義1より、次のように書ける［5］。ここで、投票者は1、…、nで表し、その全ての集合をN、全ての勝利提携の集合をW、敗北提携の集合をL、1つの提携をSとする。

$$B_i=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in S,\,S\subseteq N}\bigl(v(S)-v(S-\{i\})\bigr) \qquad (5)$$

ここで、$v(S)$は提携Sに対して得られる利得であり、次のように定義される。

$$v(S)=\begin{cases}1 & \text{when } S\in W\\ 0 & \text{when } S\in L\end{cases} \qquad (6)$$

ただし、式（5）は、バンザフ値導出の原理を式で表したにすぎず、nが定まれば自動的に値が求

まるわけではない。

〈**定義２**〉関数 sgn を次式のように定め、

$$sgn(Y) = \begin{cases} 1 & \text{when } Y \geqq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7}$$

重み $w_1, \cdots, w_n$, しきい値 t を持つ n 変数２値しきい値関数 $f(X)$ を次のように定義する。ここで、WX はベクトル $W = (w_1, \cdots, w_n)$ と X の内積である。

$$f(X) = sgn(WX - t) \tag{8}$$

特に、$[w_1, \cdots, w_n\,;\, t]$ を $f(X)$ の構造と呼ぶことがある。

■

上記、しきい値関数の定義から明らかなように、ゲーム理論で言う weighted-voting system とは２値しきい値関数が表現している状況に他ならない。２値しきい値関数の定義において、$w_i x_i$ は１の個数を意味するから、株主総会で考えると保有する株数に応じた投票者 i の賛成票数を意味している。w_i が議会における１つの党の議席数と考えれば、ある議案に対するその党の総賛成票数を意味している。しかも、可決のためのしきい値は 1/2 だけでなく、2/3 など様々な設定が可能である。すなわち、２値しきい値関数は、過半数を超えたかどうかを問題にする通常の多数決の状態だけでなく、より広い多数決の決定方式を表現していることが分かる。但し、その重みは全て０以上の整数であると仮定するのが現実的であろう。

表１で表された株主総会の決定状況を示す関数はしきい値論理の立場で眺めれば、重み4, 3, 2, 1 でしきい値６の４変数しきい値関数である。

（例２）［３］［５］３人の委員からなる委員会が３つあり、少なくとも２つの委員会で２人以上の賛成が得られた場合に議案は可決されるものとする。この投票方式は、yes-no-voting system であるが、weighted-voting system ではないことが［３］で（ある種の驚きを持って）紹介されている。しかし、この状況は、各委員会と全体の委員会をそれぞれしきい値素子に置き換えれば、「しきい値素子の多段結合が必ずしも単一のしきい値素子で表せるわけではない」というしきい論理では良く知られた事柄を意味しているに過ぎない。本例は、構造［1, 1, 1 ; 2］を持つしきい値素子を２段に結合した場合に相当し、ここでは省略するが、簡単な不等式の評価により f は単一なしきい値素子では表せないことを示すことができる。

知られているように、しきい値関数は V_2^n 空間上で完全系を成す。これは、投票ゲームの立場で考えると、

“任意の yes-no-voting system は、weighted-voting system の組合せで表現できる” ことを意味している。

3．バンザフ指数と2値しきい値関数

いま、投票者 $1, \cdots, n$ が投じる投票内容を変数 $x_1, \cdots, x_n$ で表し、結果を意味する論理関数を $f(X)$ で表すと、$f(X)$ は $x_1, \cdots, x_n$ の論理式で表し得る。次の定理は［15］では定義として述べているが、ここでは議論の仕方が異なるので定理とし正式に証明を与えておく。

〈定理1〉 投票者 $1, \cdots, n$ が投じる投票内容を変数 $x_1, \cdots, x_n$ で表し、採択結果を意味する論理関数を $f(X)$ で表すとき、投票者 i のバンザフ指数は次式で算出される。

$$(f_{x_i=0} \neq f_{x_i=1} \text{である入力の組の個数})/2^{n-1} \tag{9}$$

ここで、$f_{x_1=0}$ は関数 $f(X)$ の入力変数 x_i を 0 に固定して得られる $n-1$ 変数関数であり同様に、$f_{x_i=1}$ は x_i を1に固定した $n-1$ 変数関数である。

（証明）スイングの回数 $BP(i)$ は、投票者 i が賛成票1を投じるときと0を投じるときで採択結果が異なる場合の個数を意味している。採択結果とは論理関数としての値であるから、このとき、明らかに $BP(i)$ の値は

$$f_{x_i=0} \neq f_{x_i=1} \text{である入力の組の個数}$$

と等しい。これより直ちに定理を得る。■

前節で考察したように、賛成と反対だけで考える多数決による意思決定の状態は、2値しきい値関数で表現されるから、従ってバンザフ指数算出問題は、2値しきい値関数における式（9）の値を算出する問題に帰着した。しきい値論理において次の性質が知られている。

〈性質1〉［7］構造 $[w_1, \cdots, w_n; t]$ を持つ2値しきい値関数 $f(X)$ において、$f_{x_i=1}, f_{x_i=0}$ の構造は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &f_{x_i=0} \text{の構造：} [w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t] \\ &f_{x_i=1} \text{の構造：} [w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t-w_i] \end{aligned} \tag{10}$$

■

対象の yes-no-voting system が単一の2値しきい値関数で表せる（つまり、単一の weighted-voting system である）場合は、式（10）を用いると、バンザフ指数を次の例のように2値しきい値関数の性質を用いて容易に算出できる。

（例3）例1の関数は既に述べたように構造 $[4, 3, 2, 1; 6]$ を持つ2値しきい値関数である。それを f とすると、性質1より、$f_{x_i=0}, f_{x_i=1}$ の構造は次のようになる。

$$f_{x_i=0}:[3, 2, 1; 6] \qquad f_{x_i=0}:[3, 2, 1; 2]$$

これらの真理値表を表2に示す。表で、式（9）を満たすのは5カ所。すなわち、変数 x_1 のバンザフ指数は、5/8 になる。同様な方法で他の変数のバンザフ指数について計算し、例1と同じ値を得ることができる。

表２　例３の関数
Table 2　A function in Example 3

x_2	x_3	x_1	WX	$f_{X=6}$	$f_{X\geq 2}$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	2	0	1
0	1	1	3	0	1
1	0	0	3	0	1
1	0	1	4	0	1
1	1	0	5	0	1
1	1	1	6	1	1

ゲーム理論に基づく文献［４、５］では、バンザフ指数を組合せ計算問題の延長と考え、多くの投票者の場合は確率計算をも導入して、かなり複雑な計算方法を紹介している。しかし、ここまでの議論は、上記の式（９）と（10）を用いると、全ての場合に対しバンザフ指数を論理関数の考え方を用いて組織的かつ容易に算出できることを示している。前論文では、多入力にも容易に適用できるプログラムをＣ言語で記述し、現実の事例に適用している。

４．Ｓ型、Ｅ型３値論理関数と拡張バンザフ指数

現実の投票行動を考えてみると、賛成と反対に加えて、通常白票（neutral）が許される。白票は賛成１でもなく反対０でもない値、すなわち中間の値 1/2 と考え得る。前節までの議論は白票を念頭に置いていない。これを集計の際どう扱うかはバンザフ指数の影響力を見る上で意味がある。そこで、我々は賛成、反対の他に白票を認めた投票方式をyes-no-neutral-voting systemと呼ぶ。さらに、採決結果に「結論が出ない状態（pending)」を認めるとこれも３値になる。このように、現実社会の状況をより反映したパワー指数を考えるには、３値入力３値出力論理関数に基づく考察が必要であろう。

しかしながら、ここでは現実には最も多いと考えられる次の立場で以下考察する。

“プレイヤーは賛成（１)、反対（０）および白票（1/2）の３通りのいずれかの票を投ずることができるが、結果は可決（１）か否決（０）の２通りである”

すなわち、V_3^n から V_2 への３値入力２値出力論理関数を通じて、投票システムの解析を試みる。

実際に考え得る状態は次の２通りの場合である。

（Ｉ）白票は賛成ではないので反対と見なす――賛成がしきい値を超えた場合に成立とする立場（以下、S 型３値多数決と呼ぶ）

（Ⅱ）白票は反対ではないので賛成とみなす――賛成と白票の合計がしきい値を超えた場合に成立とする立場、すなわち反対がしきい値未満ならば成立とする立場（以下、E 型３値多数決と

呼ぶ）

以下では、賛成（1）、反対（0）、白票（1/2）という3値論理の立場からバンザフ指数を拡張定義する。

上記（Ⅰ）の場合は、プレイヤーの投票値1のみが決定に効果を持つから、あるプレイヤー i の投票値が1から0に、または1から 1/2 に変化したときに結果が1から0へ変化し得る。一方、（Ⅱ）の場合は、1から0、または 1/2 から0の投票値変化のみが結果の変化1から0を起こし得る。ここで、プレイヤー i の票が1から0に変わり得る場合の個数は、残りの $n-1$ 人の取り得る投票行動の全ての組合せ 3^{n-1} 個である。他の場合、すなわち1から 1/2 へ、1/2 から0に変化する場合の個数も同様に算出できる。よって、次のような自然な拡張定義と、関連する定理を得る。

〈定義3〉 投票者 $1, \cdots, n$ が投じる投票内容を変数 $x_1, \cdots, x_n$ で表し、採択結果を意味する論理関数を $f(X)$ で表す。投票内容は、賛成、反対、白票の3通りあるものとする。

1）ある提出された議案に対して、投票者全員が賛成、反対または白票のどれかであることを明らかにしているとき、自らの投票内容を賛成から反対、または賛成から白票に変えることにより採決の結果を可決から否決に変える（すなわち、勝利提携から敗北提携に変える）ことのできる投票者は S 型スイング（swing）の役割を果たしているという。

2）同様な場合、自らの投票内容を賛成から反対、または白票から反対に変えることにより採決の結果を可決から否決に変えることのできる投票者は E 型スイングの役割を果たしているという。

賛成、反対の組み合わせが全て同じ確率で起こるとしたとき、投票者 i の S 型スイングの回数（S 型バンザフパワー）を $S-BP(i)$ で表す。同様に E 型スイングの回数（E 型バンザフパワー）を $E-BP(i)$ で表す。このとき、投票者 i に対して次式で定める値をこの投票者の S 型バンザフ指数および E 型バンザフ指数と言い、それぞれ $S-B_i$、$E-B_i$ で表す。すなわち

$$S-B_i=\frac{S-BP(i)}{2\cdot 3^{n-1}} \qquad E-B_i=\frac{S-BP(i)}{2\cdot 3^{n-1}} \tag{11}$$

■

〈定理2〉［導出の仕方が異なるが15にもあり］S 型バンザフ指数は式（12）で、E 型バンザフ指数は式（13）で算出される。

$$\Big(\big(f_{x_i=0}\neq f_{x_i=1}\big)\text{である入力の組の個数}+\big(f_{x_i=1/2}\neq f_{x_i=1}\big)\text{である入力の組の個数}\Big)\Big/2\cdot 3^{n-1} \tag{12}$$

$$\Big(\big(f_{x_i=0}\neq f_{x_i=1}\big)\text{である入力の組の個数}+\big(f_{x_i=0}\neq f_{x_i=1/2}\big)\text{である入力の組の個数}\Big)\Big/2\cdot 3^{n-1} \tag{13}$$

（証明）定理1を導出したと同様な考察で直ちに得られるので詳細省略。■

5．3値多数決関数との関連

定義3に基づいて指数を計算する場合、2値の場合のように、しきい値関数を利用できることが望ましいが、3値以上ではしきい値関数は多数決状態を表現できないことが知られている。何故ならば、2値の場合、重み付き変数 $w_i x_i$ は投票内容 x_i の個数（1の個数）を表すのに対して、3値の場合、$w_i x_i$ は単なる積に過ぎず、1や1/2の個数を表していないからである。

しかしながら、Yes、No 以外の第3の真理値を認めた3値論理に基づく多数決原理を表す3値論理関数：3値多数決関数が既に定義されており［6］、以下ではそれを用いる。次の2種類の1項演算子を導入する。ただし、$a \in \{1/2, 1\}$

$$ {}^{a}x_i^{a} = \begin{cases} 1 & \text{when } x_i = a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{14}$$

$$ {}^{a}x_i^{1} = \begin{cases} 1 & \text{when } a \leqq x_i \leqq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{15}$$

$a = 1/2, 1$ なので明らかに、${}^{1/2}x_i^{1/2} \vee {}^{1}x_i^{1} = {}^{1/2}x_i^{1}$

〈**定義4**〉［6］入力 $X = (x_1, \cdots, x_n) \in V_3^n$ に対して次の関数を定め、これを個数関数という。

$$ N_a(X) = \sum_{i=1}^{n} |w_i| \cdot {}^{a}(x_i^*)^1 \qquad (a = 1/2, 1) \tag{16}$$

ここで、$\sum$ は算術加算である。また、｜｜は絶対値を表し、

$$ x_i^* = x_i \quad \text{when } w_i \geqq 0, \quad x_i^* = \bar{x}_i \quad \text{when } w_i < 0 $$

■

定義4から知られるように、個数関数 $Na(X)$ は、実際、入力ベクトルにおける a 以上の成分値の重み付き個数を表している。

〈**定義5**〉［6］V_3^n から V_3 への3値論理関数 $f(X)$ が次式を満たすとき、$f(X)$ は構造 $((w_1, \cdots, w_n; t_{1/2}, t_1))$ を持つ3値多数決関数であるという。ここに、$w_1, \cdots, w_n$ は重み、$t_{1/2}, t_1$ はしきい値という。ただし、$t_{1/2} \leqq t_1$

$$\begin{aligned} f(X) &= 1 && \text{if and only if } N_1(X) \geqq t_1 \\ f(X) &= 1/2 && \text{if and only if } N_{1/2}(X) \geqq t_{1/2} \text{ and } N_1(X) < t_1 \\ f(X) &= 0 && \text{if and only if } N_{1/2}(X) < t_{1/2} \end{aligned} \tag{17}$$

■

4値以上の多数決関数も同様に定義されている。W. H. Hanson が定義した3値しきい値関数［8］は、式（14）（15）の1項演算子を用いていない場合に相当し、2値しきい値関数の単純な拡

張になっている。ところが、2値では重要なしきい値関数（素子）であったAND、ORがHansonの定義ではしきい値関数にならないという実用上の大きな問題があった。それに対して定義5の3値多数決関数はAND、ORを特別な場合として含み、また3値多数決原理を自然なかたちで表現し、本節の冒頭に述べた投票結果にも3つの状態を認める多数決状態を表現している。3値多数決関数については1980年代から1990年代にかけて活発に研究された（例えば［9］）。

さて、本節の最初に仮定した3値多数決の立場は、3値入力2値出力であるので、定義5から次の関数を導入する。なお、畑らにより2値入力3値出力多数決関数が研究されているが［10］、以下の定義はその逆である。

〈定義6〉 V_3^n から V_3 への3値入力2値出力論理関数 $f(X)$ を考える。$f(X)$ が式（18）を満たすとき、$f(X)$ は構造 $[w_1, \cdots. w_n ; t_1]$ を持つ S 型3値多数決関数であるといい、ここでは $g(X)$ と記す。同様に式（19）を満たすとき、$f(X)$ は構造 ${}^{E}[w_1, \cdots, w_n ; t_{1/2}]$ を持つ E 型3値多数決関数であるといい、ここでは $h(X)$ と記する。ただし、$w_1, \cdots, w_n$ は重み、$t_{1/2}, t_1$ はしきい値といい、$t_{1/2} \leqq t_1$

$$\begin{aligned} g(X) &= 1 \quad \text{if and only if } N_1(X) \geqq t_1 \\ g(X) &= 0 \quad \text{if and only if } N_1(X) < t_1 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} h(X) &= 1 \quad \text{if and only if } N_{1/2}(X) \geqq t_{1/2} \\ h(X) &= 0 \quad \text{if and only if } N_{1/2}(X) < t_{1/2} \end{aligned} \tag{19}$$

さらに、S 型3値多数決関数で表現できる意思決定の状態を S 型 weighted-voting system と言い、E 型3値多数決関数で表現できる状態を E 型 weighted-voting system と言う。

〈定理3〉［15］定義6の S 型3値多数決関数 $g(X)$ と E 型3値多数決関数 $h(X)$ は次のように記述できる。

$$g(X) = sgn\left(N_1(X) - t_1\right) \tag{20}$$

$$h(X) = sgn\left(N_{1/2}(X) - t_{1/2}\right) \tag{21}$$

（証明）本定理は S 型3値多数決関数と E 型の定義を言い換えたに過ぎず、明らかである。

■

以下の系と定理を得る。これらは前論文で議論の前提にしていた事柄へ正式に証明を与えたものである。

〈系1〉S 型3値多数決関数は3値多数決関数の部分集合ではない。同様に E 型も部分集合ではない。

（証明）関数 $g(X) = {}^{1}x_1{}^{1}$ は S 型3値多数決関数であるが、3値多数決関数ではない。同様に、$h(X) = {}^{1/2}x_1{}^{1}$ は E 型3値多数決関数であるが3値多数決関数ではない。これらより系は明らか。 ■

この系が成り立つにもかかわらず、$g(X), h(X)$ は前述した条件付き3値多数決の状態を表現

しているので、ここでは定義の命名を用いている。

〈**定理４**〉 $V_3^n \to V_2$ への任意の３値入力２値出力論理関数は、１項演算子 ${}^0x_i^0, {}^{1/2}x_i^{1/2}, {}^1x_i^1$ と３値 AND、OR、NOT の組合せで表現できる。

（証明）任意の３値論理関数は知られているように１項演算子 ${}^0x_i^0, {}^{1/2}x_i^{1/2}, {}^1x_i^1$ と３値 AND、OR、NOT、及び定数 1/2 の組合せで表現できる。一方、定理の３値入力２値出力論理関数はその部分集合であり、かつ表現に定数 1/2 を必要としないことから明らか。 ■

〈**定理５**〉（完全系に関する定理） $V_3^n \to V_2$ への任意の３値入力２値出力論理関数は、３値多数決関数と S 型３値多数決関数の組合せで表現できる。同様に、$V_3^n \to V_2$ への任意の３値入力２値出力論理関数は、３値多数決関数と E 型３値多数決関数の組合せで表現できる。

（証明） ３値多数決関数は AND、OR、NOT をその特別な場合として含む［６］。一方、１項演算子はそれぞれ次の構造を持つ S 型３値多数決よおびその組合せで表せる。

$${}^1x_i^1 : {}^S[1;1], \quad {}^0x_i^0 : [-1;1], \quad {}^{1/2}x_i^{1/2}\overline{({}^1x_i^1 \vee {}^0x_i^0)}$$

よって、定理４より本定理が導かれる。E 型の場合も同様な考察で定理が導かれる。 ■

次の定理は［15］で既に述べたものであるが、対象が単一の S 型または E 型 weighted-voting system で表される場合に拡張バンザフ指数を算出する上で重要なものである。

〈**定理６**〉［15］ $f(X)$ が、構造 ${}^S[w_1, \cdots, w_n; t_1]$ を持つ S 型３値多数決関数であるとき、変数 x_i に関する $f_{x_i=1}, f_{x_i=1/2}, f_{x_i=0}$ の構造は式（22）のように与えられる。同様に、構造 ${}^E[w_1, \cdots, w_n; t_1]$ を持つ E 型３値多数決関数であるときは、式（23）のように与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} f_{x_i=0} \text{ の構造：} {}^S[w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t_1] \\ f_{x_i=1/2} \text{ の構造：} {}^S[w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t_1] \\ f_{x_i=1} \text{ の構造：} {}^S[w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t_1 - w_i] \end{array}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{x_i=0} \text{ の構造：} {}^E[w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t_1] \\ f_{x_i=1/2} \text{ の構造：} {}^E[w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t_1 - w_i] \\ f_{x_i=1} \text{ の構造：} {}^E[w_1, \cdots, w_{i-1}, w_{i+1}, \cdots, w_n; t_1 - w_i] \end{array}\right\} \tag{23}$$

■

６．拡張バンザフ指数と２値バンザフ指数

本節では、本来の（２値）バンザフ指数の個数と（３値）拡張バンザフ指数の個数について考察し、次の定理を得る。

〈**定理７**〉 n 人からなる yes-no voting system において、プレイヤー i に対するスイングを考える。i についてスイングを起こす全ての２値入力ベクトルの集合を $U(i)$ とする。ある ${}^jX \in U(i)$ の成分中の０の個数を m_j とする。

このとき、プレイヤー i に対する S 型3値バンザフパワー：$S-BP(i)$ に対して以下の式が成立する。

$$S-BP(i)=\sum_{{}^jX\in U(i)} 2\times 2^{mj} \tag{24}$$

（証明）S 型であるので成分 1/2 は0と同じに扱われる。すなわち、${}^jX$ の成分0を 1/2 に変えて得られる全ての3値ベクトルから、i の投票値 $x_i:1\to 0$ および $x_i:1\to 1/2$ によるスイングが起こり得る。従って、このように ${}^jX$ の0を 1/2 に変えて得られるベクトルを加えると対象のベクトルは、個数 m_j に対して $2m_j$ 個存在する。これの各々から3値の立場でのスイングが起こる。S 型3値バンザフパワーは、これら全てを $U(i)$ のベクトルに対して合計したものであるので定理が成立する。■

（例4）定理7は対象が S 型3値多数決関数やしきい値関数でなくとも成立するが、簡単のために構造 $[2,1,1\,;\,3]$ を持つ2値しきい値関数 f と構造 ${}^s[2,1,1\,;\,3]$ を持つ3値 S 型多数決関数 g を考える。真理値表を調べると x_1 に関して f がスイングを起こす場合は、(101)、(110)、(111) である。${}^jX=(101)$ の0の個数は1なので $2\times 2^{mj}=2\times 2^1$ を算出。同様に (110) から 2×2^1、(111) から 2×2^0 を算出して合計すると g のバンザフパワーは

$$S-BP(1)=2\times 2^1+2\times 2^1+2\times 2^0=10$$

g の真理値表から定義に沿って調べ同じ結果を得ることができる。

〈系2〉n 人からなる yes-no voting system において、プレイヤー i に対するスイングを考える。i についてスイングを起こす全ての2値入力ベクトルの集合を $U(i)$ とする。ある ${}^jX\in U(i)$ の成分中の1の個数を k_j とする。

このとき、プレイヤー i に対する E 型3値バンザフパワー：$E-BP(i)$ に対して以下の式が成立する。

$$E-BP(i)=\sum_{{}^jX\in U(i)} 2\times 2^{kj} \tag{25}$$

（証明）E 型では、1/2 が1と同じと見なされる点が異なるだけで論理は定理7と同様にできるので省略する。■

定理7と系2は、3値拡張バンザフパワーの値が、実は2値のバンザフパワーの値に規定されることを示している。従って指数についても同様である。

7．むすび

投票システムを、各投票者（組織）に与えられた重み（議席数や持ち株数）と決定のためのハードルであるしきい値から考察することは、社会工学分野で主に組合せ・確率の立場で研究されてき

たようである。このテーマを情報工学における論理関数の立場で論じることは、既に一部で行われていたが、社会工学で論じられてきた各投票者の実力・影響力を測定するための特別な指数への言及はない。

前論文では、特にゲーム理論で研究されてきた特別な指数の一つであるバンザフ指数を論理関数の立場から考察し、賛成、反対以外にどちらでもない立場の投票行動も認めた３値多数決原理に基づいて拡張定義した。現実世界への適用として、過去何年かのわが国衆議院、参議院における状況の指数も算出している。

本稿では、前論文で必ずしも明確でなかった定義を精査し、未証明の定理、系に証明を与えると共に、２値バンザフ指数との関連を考察した。３値に拡張したバンザフ指数が、実は２値の指数算出の基になっている値に規定されていることが明らかになった。

一般に、バンザフ指数は極端な値が出る場合があることが知られているが、これを数理的に証明し得るかは不明である。更に、より正確に人の直感に合う指数を見出すことや、結果も３値になる場合にどう適用するかなど、論ずべきテーマは数多い。

（やまもと　よしのり・本学経済学部教授）

文献

[１] Sharpley, L. S. and M. Shubik, “A method for evaluating the distribution of power in a commitee system,” American Political Science Review, Vol.48, pp.787-792, 1954.
[２] Banzhaf, J. F., “Weighted voting doesn’t work: a mathematical analysis,” Rutegers Law Review, Vol.19, pp.317-343, 1965.
[３] Taylor, A. D., Mathematics and politics－Strategy, Voting Power and Proof, Springer-Verlag, 1995.
[４] Dubey, P. and Sharpley, L. S., “Mathematical properties of the Banzhaf power index,” Mathematics of operations research, Vol.4, No.2, pp.99-131, 1979.
[５] 武藤滋夫、小野理恵、“投票システムのゲーム分析” 日科技連、1998。
[６] 山本喜則、藤田志郎、“３値多数決関数”、電子通信学会（現電子情報通信学会）論文誌、J63-D、No.6、pp.493-500、1980。
[７] Muroga, S., “Threshold logic and its applications,” John Wiley＆Sons, 1971.
[８] Hanson, W. H., “Ternary threshold logic,” IEEE Transaction on Computers, vol.EC-12, No.6, pp.191-197, 1963.
[９] Yamamoto, Y and Mukaidono, M, “Meaningful special classes of ternary logic functions,” IEEE Transaction on Computers, vol.37, No.7, pp.799-806, 1988.
[10] 畑豊、三好義昭、中島恭一、大和一晴、“２値入力Ｐ値出力関数から生成されるＰ値論理関数とその論理式決定”、電子情報通信学会論文誌Ｄ、vol.J71-D、No.12、pp.2517-2526、1988。
[11] Mukaidono M., “Regular ternary logic functons－Ternary logic functions suitable for treating ambiguity,” IEEE Transaction on Computers, vol.C-35, No.2, pp.179-183, Feb. 1986.
[12] Yamamoto Y. and Mukaidono M., “P-functions－Ternary logic functions capable of correcting input failures and suitable for treating ambiguities,” IEEE Transaction on Computers, vol.41, No.1, pp.28-35, 1992.
[13] Mine, H. and Yamamoto Y., “testing and realization of three-valued majority functions,” Proc. 11th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, Oklahoma, pp.157-162, 1981.
[14] 山本喜則、“パワー指数と論理関数の関係に関する一考察”、高崎経済大学経済学部論集、高崎経済大学論集、第48巻、第４号、pp.213-223、2006。
[15] Yamamoto Y, “Power Indexes in Voting Sustems and Multiple-Valued Logic,” Proc. 37th IEEE

International Symposium on Multiple-Valued Logic, Oslo, pp.255-260, 2007.

[16] Faigle U. and Kern W., “The Sharpley value for cooperative games under precedence constraints,” International Journal of Gaming Theory, vol.21, pp.249-266, 1992.

[17] Hsiao C. R. and Raghavan T.E.S., “Shapley value for multichoice cooperative games I,” Games and Economic Behavior, vol.5, pp.240-256, 1993.