高崎経済大学論集　第49巻　第３・４合併号　2007　93頁～103頁

自発的公共財供給の微分ゲームモデルにおける
フィードバック均衡：非対称的なプレイヤーのケース

柳　瀬　明　彦

Feedback Equilibria in a Differential Game Model of Voluntary Public Goods Provision with Asymmetric Players

Yanase Akihiko

Abstract

Existing differential game models of voluntary provision of public goods concentrate on symmetric feedback Nash equilibria by assuming that tastes and technologies of contributors are identical. This paper considers, by contrast, a model with asymmetric contributors and shows that the public good is undersupplied in the steady state under fairly general assumptions. It is also shown that in a two-player game where benefit and cost functions are quadratic, there exists a linear feedback Nash equilibrium.

１．はじめに

純粋公共財の供給を私的な経済主体による自発的（voluntary）な供給に任せると、パレート最適水準に比べて過小な供給水準となってしまうという「フリーライダー（free rider）問題」は、経済学における重要な命題の１つである。[1]現実の経済においては、環境の質の変化や教育を通じた人的資本の蓄積、技術者間のネットワークやコミュニケーションを通じた先端技術の開発など、公共財がストックとして経済に影響を与えるケースが数多く存在するが、こうした公共財ストックの動学を考慮に入れた場合のフリーライダー問題に関しては、Fershtman and Nitzan（1991）が検討を行っている。彼らは、オープンループ・ナッシュ均衡と線形フィードバック・ナッシュ均衡を導出し、パレート最適解との比較を行った。[2]そして、いずれのナッシュ均衡もパレート最適解よ

1　例えば、Cornes and Sandler（1996）を参照。
2　オープンループ・ナッシュ均衡（open-loop Nash equilibrium）とは、各プレイヤーがゲームの初期時点において、以後のすべての戦略の経路を決定する（オープン・ループ戦略）という想定した場合の、ナッシュ均衡として定義される。フィードバック・ナッシュ均衡については、本文を参照のこと。

りも定常状態において過小な公共財ストックをもたらすことを示した。Wirl（1996）および柴田・竹田（1997）は、Fershtman-Nitzan モデルにおける非線形フィードバック・ナッシュ均衡の導出を行うことを通じて、同モデルの拡張を行った。ただし、これらのいずれの研究においても、すべてのプレイヤーが同じ効用関数および費用関数を持つとの仮定が置かれている。

公共財の自発的供給モデルに限らず、微分ゲーム理論を経済学に応用した研究の多くにおいて、同質的なプレイヤーが仮定され、対称的なゲームによって分析が行われている。これは、非対称的なプレイヤーを仮定すると、フィードバック・ナッシュ均衡を求めるのが困難であるためであると考えられる。しかし、現実の問題を考える上では、[3]プレイヤーの同質性は強い仮定であると言わざるを得ない。そこで本稿では、必ずしもプレイヤーが対称的ではないと仮定した場合の、公共財の自発的供給の動学モデルを分析する。

次節ではまず、モデルの設定を行う。第3節では、一般的な関数形の下で、フィードバック均衡の満たすべき条件を導出し、定常状態における公共財の供給量がパレート最適水準に比べて過小となることを示す。フィードバック均衡は一般に非線形の連立方程式として特徴付けられるので、均衡解は一般に複数存在する可能性があるが、定常状態の安定性が満たされる場合、これらの複数のフィードバック均衡はいずれも公共財の過小供給となることが証明される。この結果は、Fershtman and Nitzan（1991）の結論が一般に妥当することを意味している。第4節では、2人のプレイヤーからなる経済、そして各プレイヤーの効用関数と費用関数がともに2次関数であるケースを仮定し、[4]その下で線形フィードバック均衡の存在と一意性を示す。一般的な関数形の下でのフィードバック均衡が存在するかどうかは、きわめて難しい問題であるので、このように単純化および特定化したモデルを分析することにより、均衡の性質をより詳細に検討することができる。第5節では、この線形フィードバック均衡およびそこから導かれる定常状態の公共財ストックに関する、比較静学分析を行う。第6節で、本稿のまとめを行う。

2．モデル

Fershtman and Nitzan（1991）をより一般化した、次のようなモデルを考える。経済には $N>1$ 人のプレイヤーが存在し、各プレイヤーは公共財ストックの水準（環境の質や教育水準）から効用を得る。公共財のストックは、各プレイヤーの自発的な資源の拠出により、時間を通じて蓄積していく。t 時点における公共財のストック水準を $K(t)$ で、プレイヤー i の拠出水準を $x_i(t)$ で $(i=1,\cdots,N)$ 、それぞれ表すことにすると、公共財ストックの動学方程式は

$$\dot{K}(t) \equiv \frac{dK(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0 > 0 \qquad (1)$$

3　例えば、安全保障や環境保全といった国際公共財を各国政府が供給するという問題を考えれば、明らかであろう。
4　線形2次微分ゲーム（linear-quadratic differential game）と呼ばれる。

で表される。ここで$\delta>0$は公共財ストックの減耗率である。

各プレイヤーの純便益は、公共財からの便益$B_i(K)$から拠出費用 $C_i(x_i)$ を差し引いたもので表される。各プレイヤーは無限の時間視野を持つと仮定すると、その目的関数は

$$J_i=\int_0^{\infty} e^{-rt}\left[B_i(K(t))-C_i(x_i(t))\right]dt \tag{2}$$

で表される。ここで $r>0$ は時間選好率であり、すべてのプレイヤーにとって共通の値をとると仮定する。便益関数および費用関数は、２回連続微分可能な増加関数で、前者は凹関数、後者は凸関数であると仮定する。

３．フィードバック・ナッシュ均衡と公共財の過小供給

定常フィードバック・ナッシュ均衡(stationary feedback Nash equilibrium)は、各$i=1,\cdots,N$ について、プレイヤーiのフィードバック戦略 $x_i^*(K)$ が、他のプレイヤー $j\neq i$ のフィードバック戦略 $x_j(K)$ を所与として（１）の制約の下で（２）を最大にするような、フィードバック戦略の組 $\left(x_1^*(K),\cdots,x_N^*(K)\right)$ として定義される（以下では単に「フィードバック・ナッシュ均衡」と呼ぶ)。フィードバック・ナッシュ均衡は、Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程式と呼ばれる次の方程式

$$rV_i(K)=\max_{x_i}\left\{B_i(K)-C_i(x_i)+V'_i(K)\left[x_i+\sum_{j\neq i}x_j(K)-\delta K\right]\right\}, \tag{3}$$

および境界条件 $\lim_{t\to\infty}e^{-rt}V_i(K(t))=0$ を満たす。ここで$V_i(K)$はプレイヤー i の価値関数(value function）すなわち（２）式で定義されるJ_iの最大値であり、$x_j(K)$はプレイヤーjのフィードバック戦略を表している。

各プレイヤーは必ず公共財の蓄積に対して資源の拠出を行う $(x_i>0)$ と仮定する。したがって、（３）式より、

$$C'_i(x_i)=V'_i(K) \tag{4}$$

が成立する。（４）式は、プレイヤー i の最適な拠出水準が公共財ストック K の関数として表現されることを意味している。これを $x_i=x_i(K)$ で表すことにしよう。（４）式および $x_i=x_i(K)$ をHJB 方程式（３）に代入すると、以下の式を得る：

$$rV_i(K)=B_i(K)-C_i(x_i(K))+V'_i(K)\left[\sum_{i=1}^{N}x_i(K)-\delta K\right].$$

この式をKに関して微分し、（４）式を用いて整理すると、包絡線条件

$$\left[r+\delta-\sum_{j\neq i}x'_j(K)\right]C'_i(x_i(K))=B'_i(K)+C''_i(x_i(K))x'_i(K)\left[\sum_{i=1}^{N}x_i(K)-\delta K\right] \tag{5}$$

を得る。フィードバック・ナッシュ均衡 $\left(x_1^*(K),\cdots,x_N^*(K)\right)$ は、各プレイヤーの包絡線条件を表す、K に関する N 元連立微分方程式（5）の解として特徴付けられる。一般にそれは一意に存在しない。序論で述べたように、Fershtman and Nitzan（1991）は便益関数と費用関数がともに2次関数のケースを仮定し、線形フィードバック・ナッシュ均衡を導出した。Wirl（1996）および柴田・竹田（1997）は、Tsutsui and Mino（1990）の手法に基づき、非線形フィードバック・ナッシュ均衡を導出し、それらが無限に存在することを示した。

定常状態においては、（1）式より $\dot{K}=\sum_{i=1}^{N}x_i(K)-\delta K=0$ が成立する。これを包絡線条件（5）に代入すると、フィードバック・ナッシュ均衡は、定常状態において

$$\left[r+\delta-\sum_{j\neq i}x_j^{*\prime}(K_S^F)\right]C'_i\left(x_i^*(K_S^F)\right)=B'_i(K_S^F),\ \ i=1,\cdots,N \tag{6}$$

を満たすことが分かる。ここで K_S^F は定常状態における公共財ストックの水準である。既に述べたように、フィードバック・ナッシュ均衡は一般に一意に定まらないので、定常状態も一般に複数存在する。しかし、定常状態の安定性を仮定するならば、K_S^F は

$$\left.\frac{d\dot{K}}{dK}\right|_{K=K_S^F}=\sum_{i=1}^{N}x_i^{*\prime}(K_S^F)-\delta<0 \tag{7}$$

を満たさなければならない。この安定性条件は、以下の命題の成立を意味する：

命題1． 安定的な定常状態を達成するフィードバック・ナッシュ均衡を考える。このとき、定常状態におけるナッシュ均衡公共財ストックの水準は、パレート最適水準に比べて過小となる。

証　明　パレート最適解は、

$$\max_{\{x_1(t),\cdots,x_N(t)\}_{t=0}^{\infty}} J_1 \quad \text{subject to} \quad J_h\geq \bar{J}_h,\ \ h=2,\cdots,N,$$

$$\dot{K}(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)-\delta K(t),\ \ K(0)=K_0>0$$

という問題の解として求められる。ハミルトニアンを

$$H=B_1(K)-C_1(x_1)+\sum_{h=2}^{N}\lambda_h\left[B_h(K)-C_h(x_h)-r\bar{J}_h\right]+\mu\left[\sum_{i=1}^{N}x_i-\delta K\right]$$

と定義すると、最適解の必要条件は以下の式で表される：

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=\mu-C'_1(x_1)=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_h}=\mu-\lambda_h C'_h(x_h)=0,\ \ h=2,\cdots,N, \tag{9}$$

$$\dot{\mu} = r\mu - \frac{\partial H}{\partial K} = (r+\delta)\,\mu - \left[B'_1(K) + \sum_{h=2}^{N} \lambda_h B'_h(K)\right]. \tag{10}$$

（８）式、（９）式、(10) 式から、パレート最適な定常状態においては

$$r + \delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{B'_i(K)}{C'_i(x_i)} \tag{11}$$

および $\dot{K} = \sum_{i=1}^{N} x_i(K) - \delta K = 0$ が成立する。これらの条件式を満たす、パレート最適な定常状態における公共財のストック水準を K_S^P で表すことにしよう。一方、フィードバック・ナッシュ均衡の定常状態で成立する（６）式は、

$$N(r+\delta) - (N-1)\sum_{i=1}^{N} x_i^{*'}(K_S^F) = \sum_{i=1}^{N} \frac{B'_i(K_S^F)}{C'_i\left(x_i^*(K_S^F)\right)} \tag{12}$$

と書き換えられるが、安定性条件（７）より、(12) 式の左辺は

$$N(r+\delta) - (N-1)\sum_{i=1}^{N} x_i^{*'} > N(r+\delta) - (N-1)\delta = Nr + \delta$$

となり、これは（11）式の左辺よりも大きくなる。以上の結果、および定常状態において $\sum_{i=1}^{N}\left[B'_i(K)/C'_i(x_i)\right]$ が K に関して減少関数となることから、直ちに $K_S^P > K_S^F$ が導かれる。

証明終わり

４．線形フィードバック均衡の存在と一意性

本節では、線形フィードバック・ナッシュ均衡、すなわち各プレイヤーの最適戦略 $x_i(K)$ が K の線形関数で表されるような均衡に焦点を当て、その存在と一意性を検討する。

以下の分析においては、 $B_i(K)$ と $C_i(x_i)$ がともに２次関数で、かつプレイヤー間の非対称性は費用関数にのみ存在する、と仮定する。具体的には、便益関数および費用関数を以下のように特定化する：

$$B_i(K) = \beta K - \frac{K^2}{2}, \;\; i = 1, \cdots, N, \tag{13}$$

$$C_i(x_i) = \frac{\gamma_i}{2} x_i^2, \;\; i = 1, \cdots, N. \tag{14}$$

ここで $\beta, \gamma_1, \cdots, \gamma_N > 0$ であり、また β は十分大きい値をとると仮定する。(13) 式および (14) 式を包絡線条件（５）に代入すると、

$$x'_i(K) = \frac{\left[r + \delta - \sum_{j \neq i} x'_j(K)\right]\gamma_i x_i(K) - \beta + K}{\gamma_i\left[\sum_{i=1}^{N} x_i(K) - \delta K\right]} \tag{15}$$

を得る。

各プレイヤーの線形フィードバック戦略を $x_i(K)=\alpha_i K+\varepsilon_i$ で表す。ここでパラメター α_i と ε_i は、(15) 式をすべての $i=1,\cdots,N$ について成立させるように決定されなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} \alpha_1\gamma_1\left[\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i K+\varepsilon_i)-\delta K\right] &= \left[r+\delta-\sum_{j\neq 1}\alpha_j\right]\gamma_1(\alpha_1 K+\varepsilon_1)-\beta+K \\ &\vdots \\ \alpha_N\gamma_N\left[\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i K+\varepsilon_i)-\delta K\right] &= \left[r+\delta-\sum_{j\neq N}\alpha_j\right]\gamma_N(\alpha_N K+\varepsilon_N)-\beta+K \end{aligned} \tag{16}$$

が任意の $K>0$ について成立しなければならない。方程式体系 (16) における K の係数を見れば明らかなように、 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ は、方程式体系

$$\begin{aligned} &\alpha_1\gamma_1\left[\alpha_1+2\sum_{j\neq 1}\alpha_j-(r+2\delta)\right]=1 \\ &\qquad\vdots \\ &\alpha_N\gamma_N\left[\alpha_N+2\sum_{j\neq N}\alpha_j-(r+2\delta)\right]=1 \end{aligned} \tag{17}$$

を満たすように決定される必要がある。また、体系 (16) における定数項より、 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_N$ は

$$\begin{aligned} &\alpha_1\gamma_1\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i=\left[r+\delta-\sum_{j\neq 1}\alpha_j\right]\gamma_1\varepsilon_1-\beta \\ &\qquad\vdots \\ &\alpha_N\gamma_N\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i=\left[r+\delta-\sum_{j\neq N}\alpha_j\right]\gamma_N\varepsilon_N-\beta \end{aligned} \tag{18}$$

を満たすように決定される必要がある。

パラメター $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ が求められれば、線形連立方程式 (18) より、 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_N$ の解が求められる。一方、体系 (17) は非線形の連立方程式なので、 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ の解が一般に存在するかどうかは明らかではない。以下では、$N=2$ のケースについて考えるが、この場合も体系 (17) を満たす α_1 と α_2 を明示的に求めるのは困難である。しかし、以下の命題を示すことは可能である：

命題2． 便益関数および費用関数が (13) 式および (14) 式で与えられており、$N=2$ であるとする。このとき、安定的な定常状態を達成する線形フィードバック・ナッシュ均衡が一意に存在する。

証　明　$N=2$ のとき、体系 (17) は

$$\alpha_i\gamma_i\left[\alpha_i+2\alpha_j-(r+2\delta)\right]=1, \quad i,j=1,2, \ j\neq i \tag{19}$$

と書き換えられる。(19)式を満たす α_i と α_j の関係は、図１のように、$\alpha_i=0$ と $\alpha_j=(r+2\delta)/2-\alpha_i/2$ という２本の直線を漸近線とする双曲線として描かれる。双曲線のうち、 $\alpha_i>0$ に対応する曲線を $p_i p_i$ で、 $\alpha_i<0$ に対応する曲線を $q_i q_i$ で、それぞれ表すことにしよう。図２は、$p_i p_i$ と $q_i q_i$ を $i=1,2$ について１つの図にまとめたものだが、この図から明らかなように、方程式体系（19）を満たす α_1 と α_2 の組は、２つ存在する。１つは、 $p_1 p_1$ と $p_2 p_2$ との交点 $\left(\alpha_1^+,\alpha_2^+\right)\in R_+^2$ であり、もう１つは、 $q_1 q_1$ と $q_2 q_2$ との交点 $\left(\alpha_1^-,\alpha_2^-\right)\in R_-^2$ である。しかし、$\left(\alpha_1^+,\alpha_2^+\right)$ の方は、安定性条件（７）を満たさない。これは、次のようにして確かめられる。線形フィードバック戦略 $x_i(K)=\alpha_i K+\varepsilon_i$ を仮定しているので、安定性条件は $\alpha_1+\alpha_2<\delta$ と書き換えられる。しかし、曲線 $p_i p_i$ は $\alpha_j>(r+2\delta)/2-\alpha_i/2$ を満たすことから、

$$\alpha_1^+ +\alpha_2^+>\frac{2}{3}(r+2\delta)>\delta$$

が成立するが、これは安定性条件と矛盾する。したがって、定常状態の安定性を満たす線形フィードバック・ナッシュ均衡の K の係数パラメターの組は $\left(\alpha_1^-,\alpha_2^-\right)$ のみである。$\left(\alpha_1^-,\alpha_2^-\right)$ を線形連立方程式（18）に代入し、ε_1 と ε_2 について解くと、

$$\varepsilon_i^*=\frac{\beta\left\{\gamma_i\alpha_i^- -\gamma_j\left[\alpha_1^- +\alpha_2^- -(r+\delta)\right]\right\}}{\gamma_1\gamma_2\left\{\left[\alpha_1^- +\alpha_2^- -(r+\delta)\right]^2-\alpha_1^-\alpha_2^-\right\}}, \qquad j\neq i \tag{20}$$

を得る。これらのパラメターを各プレイヤーの戦略関数に代入することにより、線形フィードバック・ナッシュ均衡 $x_i^*(K)=\alpha_i^- K+\varepsilon_i^*$, $i=1,2$ が一意に求められる。　証明終わり

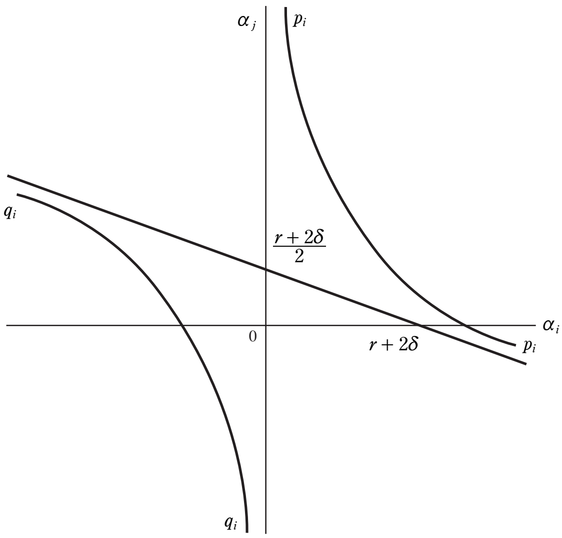

図１

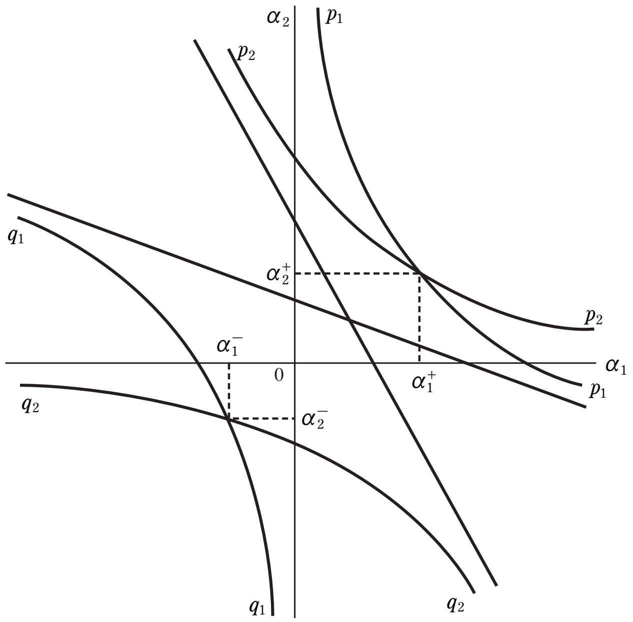

図2

定常状態における公共財ストックの水準は、 $x_i^*(K)=\alpha_i^- K+\varepsilon_i^*$ および（1）式より、

$$K_S^{LF}=\frac{\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*}{\delta-\left(\alpha_1^-+\alpha_2^-\right)} \tag{21}$$

と求められる。

5．比較静学

本節では、前節で求めた線形フィードバック・ナッシュ均衡および定常状態における公共財ストックの水準が、外生変数の変化によってどのように影響を受けるのかを検討する。

5．1．β の上昇

便益関数のパラメター β の上昇は、(19) 式および (20) 式より明らかなように、各プレイヤーの線形フィードバック・ナッシュ均衡拠出水準における K の定数 α_i^- には影響を与えない一方、定数項 ε_i^* の増加をもたらす。したがって、 β の値が大きい経済では、各プレイヤーはより大きな均衡拠出水準を選択する。この結果は、直観的に明らかであろう。 β の上昇は、所与の K の下での公共財の限界便益の上昇を意味する。このような限界便益の上昇は、公共財の生産における各プレイヤーの拠出額を増大させる。各プレイヤーの拠出額が増加するので、 β の値が大きい経済では、定常状態における公共財ストックの水準もより大きくなる。

5．2．rの上昇

割引率 r の上昇は、各プレイヤーの線形フィードバック・ナッシュ均衡拠出水準における K の係数 α_i^- と定数項 ε_i^* の両方に影響を与える。体系（19）を $\left(\alpha_1^-, \alpha_2^-\right) \in R_-^2$ の近傍で全微分して整理すると、

$$\frac{\partial \alpha_i^-}{\partial r} = \frac{\left[2\alpha_i^- - (r+2\delta)\right]\alpha_i^-}{\left[2\left(\alpha_1^- + \alpha_2^-\right) - (r+2\delta)\right]^2 - 4\alpha_1^-\alpha_2^-} > 0, \quad i = 1,2 \tag{22}$$

を得る。したがって、 r の上昇は α_1^- および α_2^- の上昇をもたらす。一方、 r の上昇が ε_i^* に与える影響については、確定的な結果は得られない。補論で示されるように、$\partial\varepsilon_i^*/\partial r$ の符号が γ_i と γ_j との大小関係に依存して正にも負にもなりうるからである。しかし、 ε_1^* と ε_2^* の合計は、r の上昇によって減少する。

次に、r の上昇が定常状態における公共財ストックの水準 K_S^{LF} に与える影響を検討しよう。(21)式を r で微分して整理すると、

$$\frac{\partial K_S^{LF}}{\partial r} = \frac{1}{\delta - \left(\alpha_1^- + \alpha_2^-\right)}\left[\frac{\partial \alpha_1^-}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_2^-}{\partial r}\right]\left\{\frac{\partial\left[\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*\right]/\partial r}{\partial\left[\alpha_1^- + \alpha_2^-\right]/\partial r} + K_S^{LF}\right\} \tag{23}$$

を得るが、(21) 式、(22) 式および (28) 式より、この式の符号は負となることが分かる。したがって、割引率 r の上昇は、定常状態における公共財ストックを減少させる。

5．3．δ の上昇

公共財ストックの減耗率 δ の上昇が各プレイヤーの線形フィードバック均衡戦略に与える影響は、(19) 式および (20) 式を見れば明らかなように、割引率 r の上昇と同様である。すなわち、 δ の上昇によって、 α_1^- および α_2^- の値は増加する一方、 $\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*$ の値は減少する。また、 δ の上昇が個別の ε_i^* の値に与える影響は不確定である。 δ の上昇が定常状態における公共財ストックの水準 K_S^{LF} に与える影響に関しても、r の上昇の影響と同様、 δ の上昇は K_S^{LF} の減少をもたらす。

6．おわりに

本稿では、公共財の自発的供給の微分ゲームモデルを、プレイヤーの選好や技術が必ずしも同じではない状況を想定し、分析を行った。各プレイヤーの拠出水準を公共財ストックに依存するフィードバック・ナッシュ均衡に焦点を当て、まず多数プレイヤーおよび一般的な関数形の下で、定常状態における公共財の過小供給を証明した。このことは、公共財のフリーライダー問題が、公共財が時間を通じて蓄積する動学的な設定の下で、かなり一般的に妥当することを意味している。その後、２プレイヤーの線形２次微分ゲームという単純化されたケースを想定し、線形フィードバック

均衡の存在と一意性を証明した。さらに、この単純化されたモデルにおいて、比較静学の結果をいくつか示した。

本稿で分析したモデルは、Fershtman and Nitzan（1991）をベースにしているが、Itaya and Shimomura（2001）は、これとは異なる状況設定の下で公共財の自発的供給の微分ゲームモデルを分析している。Yanase（2006）は、この Itaya-Shimomura モデルにおけるフィードバック・ナッシュ均衡の非効率性を、一般的な状況の下で証明している。すなわち、本稿の命題1と同様の結果が、Itaya-Shimomura モデルの枠組みでも得られている。これは、Itaya-Shimomura モデルの誘導形が、ここで分析した Fershtman-Nitzan モデルと同じようなものになるためである。なお、Yanase（2006）においては、フィードバック・ナッシュ均衡の非効率性に加えて、パレート最適な定常状態を達成するための補助金ルールの性質についても検討が行われている。

補　　論

$A \equiv \alpha_1^- + \alpha_2^- - (r+\delta) < 0$ という変数を導入することにより、(20) 式は

$$\varepsilon_i^* = \frac{\beta\left(\gamma_i \alpha_i^- - \gamma_j A\right)}{\gamma_1 \gamma_2 \left(A^2 - \alpha_1^- \alpha_2^-\right)} \tag{24}$$

と書き換えられるので、

$$\frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial r} = \frac{\beta\left[\left[\alpha_j^- - \frac{\gamma_i}{\gamma_j} A\right]\left[\alpha_i^- \frac{\partial A}{\partial r} - A \frac{\partial \alpha_i^-}{\partial r}\right] - \left[\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\alpha_i^- - A\right]\left[A \frac{\partial A}{\partial r} - \alpha_i^- \frac{\partial \alpha_j^-}{\partial r}\right]\right]}{\gamma_i \left(A^2 - \alpha_1^- \alpha_2^-\right)^2} \tag{25}$$

を得る。ここで

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial \alpha_1^-}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_2^-}{\partial r} - 1 = -\frac{\left[2\left(\alpha_1^- + \alpha_2^-\right) - (r+2\delta)\right]\left[\alpha_1^- + \alpha_2^- - (r+2\delta)\right]}{\left[2\left(\alpha_1^- + \alpha_2^-\right) - (r+2\delta)\right]^2 - 4\alpha_1^- \alpha_2^-} < 0 \tag{26}$$

である。各プレイヤーの拠出水準は正の値をとると仮定しているので、$\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^* > 0$ より、以下の不等式が成立する必要がある：

$$\frac{\alpha_j^-}{A} < \frac{\gamma_i}{\gamma_j} < \frac{A}{\alpha_i^-} \tag{27}$$

(22) 式、(25) 式および (26) 式より、

$$\frac{\partial\left(\partial \varepsilon_i^* / \partial r\right)}{\partial\left(\gamma_i / \gamma_j\right)} = \frac{\beta\left[A^2 \frac{\partial \alpha_i^-}{\partial r} - 2A\alpha_i^- \frac{\partial A}{\partial r} + \left(\alpha_i^-\right)^2 \frac{\partial \alpha_j^-}{\partial r}\right]}{\gamma_i \left(A^2 - \alpha_1^- \alpha_2^-\right)^2} > 0$$

が成立するので、$\partial \varepsilon_i^* / \partial r$ は γ_i / γ_j に関して単調増加である。γ_i / γ_j の下限における $\partial \varepsilon_i^* / \partial r$ の値は、(27) 式より、

$$\lim_{\gamma_i/\gamma_j \to \alpha_i^-/A} \frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial r} = \frac{\beta}{\gamma_i\left(A^2 - \alpha_1^- \alpha_2^-\right)}\left[\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\alpha_i}{A}\frac{\partial \alpha_j^-}{\partial r}\right] < 0$$

である一方、γ_i/γ_j の上限においては

$$\lim_{\gamma_i/\gamma_j \to A/\alpha_i^-} \frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial r} = \frac{\beta}{\gamma_i\left(A^2 - \alpha_1^- \alpha_2^-\right)}\left[\frac{A}{\alpha_i}\frac{\partial \alpha_i^-}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial r}\right] > 0$$

となる。したがって、γ_i/γ_j の値が上昇するにつれて、$\partial\varepsilon_i^*/\partial r$ は負値から正値に変わる。

次に、$\partial\left[\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*\right]/\partial r$ の符号について見てみよう。(24) 式および (25) 式より、

$$\frac{\partial\left[\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*\right]}{\partial r} = \frac{\varepsilon_1^*\left[\left(\alpha_2^- - A\right)\frac{\partial A}{\partial r} + \left(\alpha_1^- - A\right)\frac{\partial \alpha_2^-}{\partial r}\right] + \varepsilon_2^*\left[\left(\alpha_1^- - A\right)\frac{\partial A}{\partial r} + \left(\alpha_2^- - A\right)\frac{\partial \alpha_1^-}{\partial r}\right]}{A^2 - \alpha_1^- \alpha_2^-} \qquad (28)$$

を得るが、$\alpha_i^- - A > 0$ および $\partial A/\partial r$ の符号が負かつ絶対値で $\partial\alpha_i^-/\partial r$ を上回ることから、(28) 式の符号は負であることが導かれる。

（やなせ　あきひこ・本学経済学部助教授）

参考文献

[1] Cornes, R. and T. Sandler (1996), ***The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods,*** Cambridge University Press.

[2] Fershtman, C. and S. Nitzan (1991), Dynamic Voluntary Provision of Public Goods, ***European Economic Review*** 35, 1057-1067.

[3] Itaya, J. and K. Shimomura (2001), A Dynamic Conjectural Variations Model in the Private Provision of Public Goods: A Differential Game Approach, ***Journal of Public Economics*** 81, 153-172.

[4] 柴田章久・竹田之彦 (1997)「経済学における微分ゲーム理論の応用について」『経済学雑誌（大阪市立大学）』98、1-22.

[5] Tsutsui, S. and K. Mino (1990), Nonlinear Strategies in Dynamic Duopolisitc Competition with Sticky Prices, ***Journal of Economic Theory*** 52, 136-161.

[6] Wirl, F. (1996), Dynamic Voluntary Provision of Public Goods: Extension to Nonlinear Strategies, ***European Journal of Political Economy*** 12, 555-560.

[7] Yanase, A. (2006), Dynamic Voluntary Provision of Public Goods and Optimal Steady-state Subsidies, ***Journal of Public Economic Theory*** 8, 171-179.