時系列分析

1997/10/31
阿部圭司 (E-mail:abek@tcue.ac.jp)

1.　定常時系列

　時系列データを，確率変数X_tの実現値とする．また，$-\infty < t < \infty$とする．この変数X_tが以下の条件を満たすとき，X_tは定常過程に従うという[1]．

(a) X_tの平均は一定．すなわち，$E(X_t) = m$

(b) X_tの分散s_t^2は時点に依存せず一定．すなわち，$s_t^2 = s^2$

(c) X_tとX_{t-k}との間の相関係数（k次の自己相関係数）$r_{k(t)}$は時点tに依存しない．すなわち，

$$r_k \equiv Cor(X_t, X_{t-k}),\quad r_0 \equiv 1 \qquad (1)$$

したがって，X_tとX_{t-k}の共分散$g_{k(t)}$も同じ．すなわち，

$$g_k \equiv Cov(X_t, X_{t-k}) = s^2 r_k \qquad (2)$$

　コレログラム(correlogram)：標本自己相関係数数列のこと．推定値の安定から$r_{k(t)}$のkの大きさは$k \le T/5$程度である．

2.　自己回帰モデル

　分析対象が定常時系列データでなかったらどうするのか？株価が分析対象であれば階差をとったり，収益率の形にする．こうするとデータは定常性っぽくなる．テキストでは収益率をとった時点で定常化がなされているとして分析を行なう．

　自己回帰モデル(autoregressive model:AR)は以下のように与えられる．

$$X_t = m' + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_T X_{t-T} + e_t \qquad (3)$$

　ここで，$m', a_1, a_2, \cdots a_T$はパラメータ（定数）であり，e_tは撹乱項で，ホワイトノイズであると仮定する[2]．次数が１であれば，AR(1)となる．すなわち，

$$X_t = m' + a_1 X_{t-1} + e_t \qquad (4)$$

　仮にパラメータa_1の値の絶対値が1よりも大きかったら，無限の過去を想定するとX_tの値は発

---

[1] 定常性を満たしていない系列は非定常な時系列という．非定常性の原因には(1)データの水準（平均）の変化，(2)分散の変化，(3)季節性などが挙げられる．

[2] ホワイトノイズとは，

$$E(e_t) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\mathrm{var}(e_t) = s^2 < \infty \qquad \text{(b)}$$

$$\mathrm{cov}(e_t, e_{t-s}) = 0 \qquad (s = \cdots -1, 0, 1, 2, \cdots) \qquad \text{(c)}$$

の特性を有する確率過程である．

散する．したがって，$|a_1|<1$である[3]．
一方，パラメータが 1 個のとき，これはランダムウォークモデルと呼ばれる[4]．

$$X_t = X_{t-1} + e_t \qquad (5)$$

分析の実際では，モデルの次数Tを分析者が特定しなければならない．次数の選択（モデルの同定）にはいわゆる Box-Jenkins 流の手続き[5]と情報量基準[6]による方法がある．

3. 多変量時系列モデル

先の時系列モデルは次数が仮に大きくなっても，扱うのは単変量のモデルである．人は大抵単変量の次に多変量を求める．複数の変数による時系列的構造（これには異時点間における変数同士の関係も含まれる）を分析する手法が多変量時系列分析である．代表的なものが，AR モデルの多変量版である VAR(Vector autoregressive)モデルである[7]．

多変量時系列変動要因モデル

多変量時系列変動要因(Multivariate time series variance component:MTV)モデルは時系列的に変動する p 個の確率変数の背後に，互いに独立な共通変動要因があると想定し，これが AR などの時系列構造を有していると想定する．VAR モデルの持つパラメータ数の問題，変数間の時系列的な多重共線性の問題を回避できる．

いま，i 銘柄の t 時点における株価をX_{it}とし，以下のモデルにしたがっていると仮定する．

---

3 これはモデルの定常性の条件といわれる．一般的には係数$a_1, a_2, \cdots a_T$について，wについてのp次の多項式
$w^T - a_1 w^{T-1} - a_2 w^{T-2} - \cdots - a_T = 0$の根が絶対値で 1 より小さいことである．

4 正しくは定数項$m = 0$なる和分を含む ARIMA(0,1,0)モデルとして定義される．期待値は$E(X_t) = X_0$で常に一定であるが，観測されるデータのレベルは確率的に変動する．

5 標本自己相関，偏自己相関を利用した，モデルの同定→推定→診断→予測の一連の手続き．

6 AIC(Akaike's information criterion)は以下の式で与えられる．

$$AIC = \log s_e^2 + 2(p+q)/T \qquad \text{(e)}$$

ただし，s_e^2はモデルの撹乱項の分散の推定値である．AIC は推定値を用いた 1 期先予測の誤差を最小にするモデルを選択する基準といえる．しかし，この基準は実際には非常に高い次数のモデルを選択するくせがある．また，この基準による選択は一致性（標本数が多くなると真の次数をもたらすこと）を持っていない．この点で SBC(Schwarz's bayesian information criterion)の方が優れているといえる（しかし，この基準は逆にやや低めの次数を選ぶくせがある）．SBC は以下の式で与えられる．

$$SBC = \log s_e^2 + (p+q)\log(T)/T \qquad \text{(f)}$$

7 一般的なm変量の VAR モデルは行列を用いて以下のように表わせる．

$$\mathbf{X_t} = \mathbf{A_1 X_{t-1}} + \mathbf{A_2 X_{t-2}} + \cdots + \mathbf{A_T X_{t-T}} + \mathbf{u_t} \qquad \text{(g)}$$

ここで，$\mathbf{X_t}$は$\mathbf{X_t} = \left[X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{mt}\right]'$で示される$m(m \geq 2)$個の確率変数からなる$m$次元ベクトルである．また，$\mathbf{u_t}$は$\mathbf{u_t} = \left[u_{1t}, u_{2t}, \cdots, u_{mt}\right]'$で示される$m$次元の撹乱項ベクトルであり，ホワイトノイズであると仮定する．さらに，$\mathbf{A_k}$は$\mathbf{A_k} = \left[a_{k,ij}\right](k = 1,2,\cdots T)$なる係数パラメータの$m$次元正方行列である．VAR モデルではパラメータ（特に係数パラメータ）の数がデータに大きく左右される．推定に必要なパラメータの数はm変量の VAR(p)の場合，$m^2 p$になる．場合によってはデータの数よりもパラメータの数が大きくなることもある．

$$X_{it} = m_{it} + a_{i1}F_{1t} + a_{i2}F_{i2} + \cdots + a_{ip}F_{pt} + e_{it} \qquad (6)$$

ここで，
 m_{it} ：X_{it} の平均
 F_{kt} ：X_{it} の第 k 番目の共通変動要因
 a_{ik} ：第 k 番目の共通変動要因が X_{it} に与える影響の大きさを示す係数
 e_{it} ：誤差項

ここで，$Var(F_{1t}) > Var(F_{2t}) > \cdots > Var(F_{pt})$ とする．また，　式は以下の性質を満たさなければならない．
(1)各 F_{kt} は平均 0 の定常過程（例えば AR など）にしたがう．すなわち，

$$F_{it} = b_{j1}F_{j,t-1} + b_{j2}F_{j,t-2} + \cdots + b_{jT}F_{j,t-T} + e_{jt} \qquad (7)$$

(2) $\{F_{jt}\}$ と $\{F_{it}\}$ は無相関

$$Cov(F_{jt}, F_{it}) = 0 \qquad j \neq i \qquad (8)$$

(3)係数 a_{ik} はモデルの定常性と識別性のため以下の条件を満たす．

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \cdots + a_{pk}^2 = 1 \qquad k = 1,2,\cdots,p \qquad (9)$$

$$a_{1k}a_{1l} + a_{2k}a_{2l} + \cdots + a_{pk}a_{pl} = 0 \qquad k \neq l \qquad (10)$$

実際の推定手順
 (a)株価 X_{it} の平均を推定する．一番簡単なのは，ある期間の平均であり，その他時間とともに変化するトレンドを考慮した形などがある．
 (b)平均値をもとに株価 X_{it} を基準化する．次にこれらに対して主成分分析を行い，主成分因子である共通変動要因 F_{kt} と係数 a_{ik} を推定する．で，この作業をくり返し共通変動要因 F_{kt} の時系列セットを得る．
 (c)共通変動要因 F_{kt} の時系列セットに対して AR などの定常時系列モデルをあてはめ，パラメータを推定する．
 (d)推定した共通変動要因モデルを用いて共通変動要因の推定値を求め，ついでこれらを用いて株価 X_{it} の推定値を得る．

参考文献

J.D.Hamilton, 1994, Time series analysis, Princeton.
刈屋武昭, 1990, 『金融・証券計量分析の基礎と応用』, 東洋経済新報社.
山本 拓, 1988, 『経済の時系列分析』, 創文社.